

N° d'ordre : 2357

THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LILLE

pour obtenir

LE TITRE DE DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ

SPÉCIALITÉ : MATHÉMATIQUES

par

Olivier GARET

MESURES DE GIBBS GAUSSIENNES ET DYNAMIQUES ALÉATOIRES ASSOCIÉES SUR $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$

Soutenue le 19 Novembre 1998 devant la Commission d'Examen :

Président : R. MINLOS, Académie des Sciences de Russie, Moscou
Directeur de Thèse : S. ROELLY, CNRS, Université de Lille I
Rapporteurs : P. CATTIAUX, École Polytechnique
H.-O. GEORGII, Universität München
Examineurs : M. DUFLO, Université de Marne-la-Vallée
R. MOCHÉ, Université de Lille I
H. QUEFFELEC, Université de Lille I
H. ZESSIN, Université de Lille I

Remerciements

Alors que les douleurs de l'enfantement de la thèse commencent à se calmer, il est temps de remercier les personnes si nombreuses qui m'ont tant aidé – tant donné, en fait. L'exercice est difficile tant il est vrai que la sincérité est toujours impudique.

En janvier 1996, alors qu'étudiant en DEA j'étais en quête d'un directeur de mémoire – voire plus, si affinités – je tombai sur Sylvie Roelly, à qui je demandai avec gaucherie si j'étais bien au laboratoire de Probabilités, ce qu'un écriteau bien placé en évidence aurait dû m'assurer. Elle me répondit avec beaucoup de gentillesse et d'attention, et, comme toujours pleine d'idées, me sortit d'innombrables articles après m'avoir évoqué la richesse du champ de recherches qu'elle me proposait. J'ai par la suite pu apprécier ses grandes qualités scientifiques, usé et abusé de sa disponibilité et de sa force de travail peu communes. Cependant, je veux dans ces remerciements mettre en avant le constant soutien moral qu'elle m'a apporté à tous les instants – *vel secundas, vel adversas*.

Je tiens à remercier M. Cattiaux et M. Georgii d'avoir accepté d'être rapporteurs de ma thèse. Je m'estime très honoré par l'intérêt qu'ils ont bien voulu accorder à mon travail et leur sais gré de leurs remarques, qui m'ont aidé à voir les ponts qui pouvaient exister entre mon travail et d'autres perspectives mathématiques.

C'est pour moi un grand honneur que de compter M. Minlos au nombre des membres de mon jury. Ma première lecture en mécanique statistique fut un petit opuscule qu'il a écrit à l'usage d'étudiants débutants. J'espère ici lui prouver que son méritoire souci de pédagogie n'aura pas été vain. De manière générale, les thésards imaginent inaccessibles les auteurs de leur ouvrages de chevet : la réalité montre heureusement qu'il n'en est rien et j'ai grand plaisir à voir Mme Dufflo parmi les membres de mon jury. La présence de Hans Zessin et d'Hervé Queffelec me fait également très plaisir : les discussions générales que j'ai pu avoir avec chacun d'entre eux sur leur conception de la mathématique et leurs larges cultures dont ils ne sont pas avares ont contribué à rendre plaisantes ces années de thèse. Enfin, je suis

suis à la fois heureux et ému que M. Raymond Moché ait accepté de faire partie de mon jury de thèse. C'est lui qui, en licence puis en maîtrise, m'initia à la théorie des Probabilités, et, par son enseignement impeccable, m'en fit voir la rigueur et la beauté.

Je veux remercier également remercier l'équipe du labo de Statistique et Probabilités, pour la chaleur de l'accueil qui me fut donné, bien sûr, mais surtout pour la spontanéité des échanges mathématiques qui s'y déroulent. En particulier, Myriam et Bruno m'ont toujours laissé tableau et téléphone ouverts, parfois jusqu'à des heures avancées – j'en demande donc pardon à Xavier et Virginie! Je tiens à ce qu'ils sachent le plaisir que j'ai à parler mathématique avec eux.

De la même manière, je veux remercier mes enseignants. A l'heure où je m'apprête à soutenir ma thèse de doctorat – diplôme ô combien chargé de symboles! – je mesure la lourde dette envers tous ces gens formidables qui, conscients de la force émancipatrice de la connaissance, ont choisi de la transmettre et m'ont ainsi *appris à penser librement*, ainsi que chantaient nos grands-parents. Je pense en particulier à M. Bigo qui, en 5^e me fit découvrir l'analyse combinatoire, à Pierre Scherpereel qui nous initia à la recherche mathématique en préparant le Concours Général, ainsi qu'à Bruno Arzac et à Jean Voedts qui en hypotaube et en taupe, s'ingénièrent à m'enseigner la rigueur mathématique, car, comme dit Brassens, *sans technique un don n'est rien qu'une sale manie*! Dans des moments mathématiques difficiles, Brigitte Séverin sut être là et je l'en remercie.

Tout au long de ces années de thèse, j'ai bénéficié du soutien constant de tous mes amis ¹ qui m'ont pardonné, ici et là-bas, d'être moins présent, même si ça a pu retarder pour certains l'obtention d'un camembert marron.

Merci à ma famille et ma belle famille qui m'ont toujours offert affection et compréhension.

Merci à mes parents qui m'ont donné un amour et une confiance indicibles.

Et merci à toi, Murièle, qui as payé un lourd tribut à une recherche chronophage. Merci à toi, pour tout ce que tu es.

¹En particulier, de toute la bande (note de la Camif)

Summary :

The aim of this work is the study of random fields on the lattice \mathbb{Z}^d associated to quadratic interactions.

Extending results of Dobrushin and Künisch, we first state simple criteria for the existence and uniqueness of Gibbs measures associated with a given quadratic interaction and verifying some conditions of support. We study some topological properties of the set of parameters of the systems for which there is existence and uniqueness. For $d = 1$, we study in detail the set of Gibbs measures in case there is a phase transition – *i.e.* non-uniqueness of a Gibbs measure.

We then return to systems of arbitrary dimension. After having studied the influence of the phase transition on the spacial decrease of the correlation of the Gaussian Gibbsian field and on central limit theorems, we introduce a gradient stochastic differential system associated to the interaction. We establish that each pure phase – *i.e.* each extremal Gibbs measure – can be obtained as temporal limit from the solution of the stochastic differential equation for a set of deterministic conditions of which we give a description. Thus the absence of a phase transition corresponds to the ergodicity of the system. Moreover, we study the influence of a phase transition on the speed of convergence.

Finally, we present a stochastic algorithm discretizing the differential system which allows us to obtain pure phases as limits of an inhomogenous Markov chain in discrete time. To finish, we implement this algorithm on a computer and obtain an illustration of some of the previously demonstrated theorems.

Keywords : Gibbsian fields , Gaussian fields, phase transition , infinite dimensional diffusion, ergodicity, simulation, stochastic algorithm.

Table des matières

Table des matières	i
0 Introduction	1
0.1 Sur la mécanique statistique en général	1
0.2 Promenade historique	3
0.3 Philosophie générale	5
0.4 Plan de la thèse	6
1 Champs de Gibbs gaussiens sur $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$	9
1.1 Résultats d'existence et d'unicité	12
1.1.1 Le hamiltonien quadratique	12
1.1.2 Unicité sous certaines hypothèses de croissance	15
1.1.3 Un calcul explicite de limite supérieure	25
1.1.4 Un ensemble connexe de paramètres pour lesquels il y a existence et unicité	31
1.1.5 Transition de phase pour $d = 1$	36
1.2 Un modèle exactement résoluble	39
1.2.1 Existence d'une mesure de Gibbs	39
1.2.2 Diagramme de phases	41
1.3 Sur l'instabilité de l'unicité	46
2 Transition de phase, covariance et TLC	49
2.1 En l'absence de transition de phase	50
2.1.1 Décroissance de la covariance	50
2.1.2 Théorème de limite centrale	51
2.2 Influence de la transition de phase	52
2.2.1 Un résultat d'analyse	53
2.2.2 Décroissance de la covariance	67
2.2.3 Application aux marches aléatoires apériodiques sur \mathbb{Z}^3	68
2.2.4 Sur la généralité des résultats précédents	73
2.2.5 Théorème de limite centrale	74

2.3	Commentaires	76
3	Étude du processus de diffusion associé	79
3.1	L'équation différentielle stochastique	80
3.2	Existence et unicité de la solution	82
3.2.1	Un lemme d'analyse	82
3.2.2	Le théorème d'existence et unicité	83
3.3	Covariance de la diffusion	84
3.4	Exemples d'espaces d'état E convenables	89
3.4.1	L'espace $B_{p,0}$	89
3.4.2	Les espaces ℓ^p pondérés	95
3.5	Comportement asymptotique en temps	97
3.5.1	Métrisation de la convergence en loi	97
3.5.2	Comportement asymptotique à condition initiale nulle	99
3.5.3	La notion d' α -ergodicité	100
	Exemple	105
3.5.4	Description des lois limites dans un cadre de transition de phase	106
3.5.4.1	Exemples de supports spectraux	107
3.5.4.2	La convergence en temps	108
3.6	Vitesse de convergence de la dynamique	114
3.6.1	Vitesse en l'absence de transition de phase	114
3.6.2	Vitesse en présence de transition de phase	117
3.6.3	Vitesse pour une condition initiale aléatoire	121
3.7	Commentaires	122
4	Discrétisation de l'e.d.s. et simulation	125
4.1	Discrétisation du système	126
4.2	Comportement à condition initiale nulle	127
4.2.1	Convergence du système	127
4.2.2	Vitesse de convergence	134
	En l'absence de transition de phase	134
	En présence de transition de phase	136
4.3	Influence de la condition initiale	138
4.3.1	Comparaison des systèmes discret et continu	140
4.3.2	Vitesse de convergence	142
	Vitesse de convergence en l'absence de transition de phase	144
	En présence de transition de phase	145
4.4	Simulation informatique	146
4.4.1	Choix de l'environnement de développement	146

4.4.2	Description du programme	146
4.4.3	Contraintes mathématiques et techniques	147
4.4.4	Description de l'algorithme	148
4.4.5	Évaluation du temps de calcul	149
4.4.6	Résultats obtenus	150
A	Code Source de l'application	153
A.1	fichier principal Quadyn.dpr	153
A.2	Unité Ahoui.pas	153
A.3	Fiche Ahoui.txt	154
A.4	Unité Dyna.pas	157
A.5	Fiche Dyna.txt	165
	Bibliographie	168
	Index	172

Chapitre 0

Introduction

0.1 Sur la mécanique statistique en général

L'objet de la mécanique statistique est l'étude de systèmes constitués d'une infinité de composants en interaction. Plus précisément, il s'agit de mettre en lumière un lien entre le comportement microscopique du système – *i.e.* la manière dont l'état de chaque particule est influencé par celui des autres, et son comportement macroscopique, autrement dit ses propriétés globales.

Il est particulièrement significatif d'étudier des systèmes vérifiant la *loi de Boltzmann-Gibbs* : si l'on se fixe un volume fini Λ et que l'on connaît parfaitement l'état du système à l'extérieur de Λ , alors, la probabilité d'un état dans le volume Λ est proportionnelle à e^{-H_Λ} , où H_Λ est une fonctionnelle d'énergie appelée hamiltonien.

Un cadre mathématique rigoureux a été développé afin de formaliser cette intuition physique qui s'est révélée modéliser de nombreux systèmes réels. Ce travail pionnier, fondateur de la théorie mathématique, est essentiellement l'oeuvre de Dobrushin, Landford et Ruelle, dont les noms restent attachés à l'écriture mathématique de la loi de Boltzmann-Gibbs : les équations "D.L.R" sont une famille d'équations que doivent vérifier les lois conditionnelles d'une mesure de probabilité P pour que celle-ci puisse être considérée comme solution du problème induit par la famille des hamiltoniens H_Λ . Une telle mesure est appelée mesure de Gibbs pour le hamiltonien $(H_\Lambda)_\Lambda$. On devine aisément qu'il ne suffit pas de se donner un hamiltonien $(H_\Lambda)_\Lambda$ pour obtenir une mesure de Gibbs associée : quand bien même le système de lois conditionnelles induit est compatible, cela ne suffit pas à assurer l'existence d'une mesure de Gibbs : ce sera donc le premier problème à élucider, quel que soit le système étudié.

Physiquement, il est assez naturel de se représenter une mesure de Gibbs comme une mesure d'équilibre d'une certaine évolution temporelle. Notre approche reste ici heuristique et nous ne prétendons pas pour l'instant construire concrètement cette dynamique. Afin de présenter les questions qui se posent naturellement, introduisons un modèle factice que l'on ne prétend pas définir rigoureusement, mais qui permet à l'imagination de se représenter les phénomènes que l'on peut conjecturer. Imaginons une population qui ait, chaque matin, à choisir la couleur de la chemise qu'elle va porter, rouge ou bleue. Le choix est aléatoire, mais les probabilités de ce choix sont déterminés par

- la force de l'habitude, qui pousse à conserver le même vêtement que la veille : c'est le terme d'*interaction propre*.
- le conformisme (ou l'anticonformisme) qui pousse à imiter (ou au contraire à se démarquer) de ses voisins immédiats : c'est l'*interaction* proprement dite entre les individus.
- le goût *a priori* d'un individu pour le bleu ou le rouge

Ici, on suppose pour simplifier que ces paramètres sont les mêmes pour tous les individus et qu'ils n'ont aucune préférence *a priori* pour le rouge ou le bleu.

Dans le cas d'une population très individualiste, *i.e.* lorsque le terme d'interaction propre est très grand devant les autres interactions, il est raisonnable de penser qu'il n'y aura qu'un seul état d'équilibre dans lequel la corrélation entre les couleurs choisies par deux individus décroît très vite – on devine exponentiellement – avec la distance les séparant, et où le choix se fait indifféremment entre le rouge et le bleu.

A l'inverse, dans le cas d'une population relativement influençable, où l'interaction propre ne l'emporte pas sur les valeurs extérieures, on imagine aisément qu'il peut y avoir plusieurs états d'équilibre : un état où le rouge est la couleur politiquement correcte largement majoritaire, et un autre où les zéloteurs du bleu ont imposé quasi-unanimement leur point de vue. Lorsqu'il y a existence de plusieurs mesures de Gibbs, on dit qu'il y a *transition de phase*. Pour de tels états d'équilibre dus au caractère influençable des individus, il est probable que la décroissance de la corrélation soit moins rapide que dans le cas précédent.

On voit que pour se faire une idée de ce qu'est une mesure de Gibbs, il est naturel de la considérer comme la mesure limite d'une certaine dynamique. On devine également qu'en cas de non-unicité de la mesure de Gibbs, la mesure limite dépendra de la condition initiale de la dynamique : dans notre exemple, si le système est initialisé dans un état où une couleur est largement majoritaire, elle tendra à le rester si les comportements sont conformistes.

La réflexion qui précède est évidemment totalement heuristique. Elle nous indique cependant quelques questions naturelles quel que soit le modèle.

1. Pour quelles valeurs des paramètres du système y a-t-il existence d'une mesure de Gibbs ?
2. Pour quelles valeurs y a-t-il transition de phase ?
3. Comment la transition de phase influe-t-elle sur la vitesse de décroissance de la covariance ?
4. Comment construire un système dynamique stochastique qui admette des mesures de Gibbs associées au hamiltonien pour lois limites ?
5. Déterminer les liens existant entre la condition initiale et la loi limite.

L'objet principal de notre travail va être de donner des réponses à ces questions pour des interactions quadratiques à portée finie ou non. Nous serons amenés à exploiter alternativement les deux approches du problème : l'angle statique et l'angle dynamique. L'interaction étant quadratique, on aura essentiellement à considérer des mesures gaussiennes. Nous renvoyons à l'ouvrage de Lifshits [31] pour donner un aperçu de l'immense littérature consacrée aux processus gaussiens. Quant à nous, nous faisons le choix délibéré de nous concentrer ici essentiellement sur l'aspect gibbsien des mesures gaussiennes.

0.2 Promenade historique

L'étude des champs aléatoires sur un réseau soumis à des distributions conditionnelles gaussiennes fut suggérée pour la première fois par Dobrushin en 1966, alors que ce dernier était en train de jeter les bases de la théorie des mesures de Gibbs. Les champs gaussiens sur $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$ sont d'une grande importance dans la théorie des mesures de Gibbs pour plusieurs raisons : en premier lieu, il est bien connu que les variables gaussiennes permettent des calculs exacts, prometteurs de résultats fins, même dans des cas de forte dépendance. En second lieu, les interactions quadratiques apparaissent comme le premier pas naturel dans l'étude de systèmes interactifs à espace d'états continu. En effet, si de nombreux résultats répondant aux questions formulées plus haut – ont d'ores et déjà pu être démontrés pour des systèmes de spins discrets (voir par exemple [32] ou [26]), l'état des connaissances pour des modèles continus est loin d'être aussi avancé. Ainsi, il est important de remarquer que les champs gaussiens fournissent le premier exemple de champ aléatoire avec un espace d'états non compact pour lequel l'ensemble des mesures de Gibbs est décrit avec précision. Ce remarquable travail a été mené de manière indépendante par Dobrushin et Künsch en 1980. Rozanov [39], Chay [10], Benfatto et al. [4] ont également fourni diverses contributions dans ce domaine. Pour un historique plus fourni, on pourra se reporter à l'ouvrage de référence de Georgii [18].

À la lecture de ces lignes, on pourrait penser que les travaux de Dobrushin et Künisch mettent un point final à l'étude des problèmes d'existence et d'unicité des mesures de Gibbs associées à une interaction quadratique. Il suffit de lire l'article de Dobrushin pour comprendre que telle n'était pas son opinion. En effet, les conditions nécessaires et suffisantes qu'il obtient pour l'existence et pour l'unicité des mesures de Gibbs sont difficilement vérifiables et fournissent peu d'information sur les propriétés des mesures obtenues, puisqu'elles exhibent des mesures qui ne sont pas nécessairement physiquement raisonnables. À la fin de son article, Dobrushin suggère d'intégrer des conditions supplémentaires de moment ou de support et traite quelques cas particuliers. Nous reprendrons ces idées et les développerons.

On peut associer à l'étude de mesures de Gibbs l'étude de systèmes infinis d'équations différentielles stochastiques de type gradient dont elles sont les mesures stationnaires. La forme générique de tels système est la suivante :

$$\forall i \in \mathbb{Z}^d, \forall t \geq 0 \quad X_t^i = \zeta^i + W_t^i - \frac{1}{2} \int_0^t [\phi'_i(X_s^i) + \sum_{j \neq i} \phi'_{i,j}(X_s^i, X_s^j)] ds \quad (1)$$

Schématiquement, l'étude d'un système infini d'équations différentielles stochastiques peut se diviser en trois étapes :

- choix de l'espace dans lequel on veut que la solution évolue
- preuve de l'existence et de l'unicité d'une solution dans cet espace pour une condition initiale donnée
- étude des propriétés qualitatives des solutions

Parmi les réponses données aux deux premières questions, on peut citer par exemple l'article de Shiga et Shimizu [44], ou les articles de Royer [40] et Doss et Royer [15], qui peuvent s'appliquer à certaines interactions quadratiques. Shiga et Shimizu choisissent de faire vivre leurs solutions dans l'espace des suites tempérées, tandis que Doss et Royer choisissent un espace ℓ^2 à poids. Lorsqu'une interaction particulière nous est donnée, il n'est pas évident d'étudier des propriétés telles que le comportement asymptotique de la solution lorsque le choix de l'espace dans lequel vit la solution unique a été fait *a priori* de manière générale. C'est pourtant ce à quoi parviennent Roelly et Seu [38] dans un cadre assez général incluant certaines interactions quadratiques, mais toujours sous des hypothèses où l'interaction propre est beaucoup plus grande que les interactions par paires et où il y a unicité de la mesure de Gibbs.

Pour les interactions quadratiques qui nous intéressent, il convient de prendre

$$\phi_i(x) = \frac{1}{2} J(0) x^2 \text{ et } \phi_{i,j}(x, y) = J(i - j) xy,$$

où J est une suite paire sommable définie sur \mathbb{Z}^d .

Les équations différentielles stochastiques linéaires (et semi-linéaires) infinidimensionnelles sont étudiées en détail dans le traité de Da Prato et Zabczyk [11], mais les résultats asymptotiques qu'ils obtiennent supposent une hypothèse d'accrétivité d'un opérateur qui implique l'unicité de la mesure de Gibbs. Kondratiev et Sokol [29] ont suggéré pour le modèle quadratique qui nous intéresse de prendre comme espace d'états l'espace des suites tempérées – appelées aussi suites à croissance lente –. L'idée était féconde, mais n'a pas été complètement exploitée en cas de transition de phase. Nous reprendrons cette idée et démontrerons des résultats valides sous des hypothèses plus faibles sur la décroissance de l'interaction J , qu'il y ait transition de phase ou non. Citons également l'article de Deuschel [13] qui étudie d'une part la convergence en loi à condition initiale nulle pour certaines interactions quadratiques, et surtout d'autre part des théorèmes de limite centrale temporels.

0.3 Philosophie générale

La théorie des mesures de Gibbs est une théorie jeune, bien qu'aujourd'hui solidement étayée. Elle a des praticiens parmi les spécialistes de la théorie des systèmes dynamiques, les probabilistes et les physiciens. Cette diversité fait sa richesse, mais est cause que certains énoncés, démontrés dans certaines situations, demeurent des conjectures dans d'autres et il est difficile de toujours avoir à l'esprit ce qui est démontré et ce qui est encore seulement une supposition. Dès lors, il nous est apparu que l'objectif essentiel devait être de vérifier soigneusement dans le cas des interactions quadratiques les résultats que l'on pouvait légitimement pressentir – parce que leur validité avait déjà été établie dans d'autres cadres, par exemple pour des modèles discrets. Ainsi, on a parfois été amené à introduire des précisions superflues dans les modèles discrets. En particulier, il était primordial de mettre en lumière comment se manifeste la présence de transition de phase : son influence sur la covariance, sur les théorèmes de type limite centrale, sur le comportement asymptotique de systèmes dynamiques.

Les quelques problèmes que nous venons d'énoncer ne sont pas propres aux seules interactions quadratiques et les questions posées sont des questions complètement naturelles en théorie des probabilités, qui sont généralement énoncées sans qu'il soit fait mention d'un contexte gibbsien. Lorsque l'on est en présence de comportements asymptotiques hors norme – où l'on considère qu'un comportement est normal s'il est le même que lorsqu'il y a indépendance –, l'explication classique est de type quantitatif : on dira par exemple que les

coefficients de mélange ne décroissent pas assez vite. Dans le cadre gaussien, nous essayons de substituer à des explications quantitatives une explication qualitative : la mesure considérée est une mesure de Gibbs dans un cadre de transition de phase.

Nous savons bien qu'en mathématique comme en de nombreuses choses, il est vain de vouloir déterminer une *cause première*. Nous voulons simplement ici, par l'exemple des mesures gaussiennes, montrer que la théorie des mesures de Gibbs propose une lecture de certains phénomènes probabilistes qui mérite de ne pas être négligée.

0.4 Plan de la thèse

La thèse est divisée en quatre parties. Une fois connus les définitions et quelques résultats du chapitre 1, les chapitres 2 et 3 peuvent se lire chacun indépendamment. La bonne compréhension du chapitre 4 nécessite la lecture du chapitre 3, puisque ces deux chapitres ont des hypothèses communes et des preuves liées.

Le chapitre 1 introduit les espaces et les résultats fondamentaux. On commence par donner un résultat dans l'esprit de ce que suggérait Dobrushin à la fin de son article : si l'on s'intéresse exclusivement aux mesures de Gibbs dont le support est inclus dans un espace de type ℓ^∞ à poids – pour certains poids –, on montre qu'il y a unicité de la mesure de Gibbs si et seulement si une fonction \hat{J} , déterminée par l'interaction, ne s'annule pas sur un certain ensemble. On peut ainsi demander que les suites $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}^d}$ du support soient à croissance sous-polynômiale – où le polynôme est fixé, ce qui est donc plus fin que la seule notion de suite tempérée – ou qu'elles soient à croissance sous-exponentielle. On démontre qu'une interaction quadratique dont les coefficients décroissent à vitesse exponentielle et pour laquelle il y a existence et unicité d'une mesure de Gibbs vérifiant certaine condition de support peut être continûment transformée en une interaction propre pure, l'unicité de la mesure de Gibbs associée étant préservée pendant la transformation. Pour $d = 1$, on décrit précisément l'ensemble des mesures de Gibbs ayant un support convenable. Pour un exemple particulier – mais significatif – étudié complètement, on constate que les restrictions sur le support n'ont pas fait perdre de mesure de Gibbs.

Au chapitre 2, on travaille à nouveau sur un réseau de dimension quelconque. L'objet du chapitre est d'étudier la décroissance spatiale de la covariance de la mesure de Gibbs gaussienne stationnaire associée à l'interaction. Avec les mêmes restrictions que précédemment, on montre qu'en l'absence de transition de phase, la décroissance de la covariance est exponentielle dès

que les coefficients de l'interaction décroissent à vitesse exponentielle. Dans le cas où \hat{J} a un unique zéro d'ordre fini -pas nécessairement entier- sur le tore \mathbb{U} , on donne dans de nombreux cas un équivalent de la covariance à l'infini : on constate que la covariance décroît comme l'inverse d'une fonction puissance. On démontre en l'absence de transition de phase un théorème de limite centrale avec un coefficient de renormalisation semblable à celui du cas des variables indépendantes identiquement distribuées. Au rebours du comportement classique, on montre pour certaines valeurs de l'ordre du zéro de \hat{J} un théorème de limite centrale avec une renormalisation différente.

L'objet du chapitre 3 est d'étudier le système différentiel stochastique gradient associé à une interaction quadratique : c'est un système différentiel stochastique linéaire infini-dimensionnel. On commence par donner un théorème d'existence et d'unicité de la solution du système différentiel vivant dans certains espaces de Banach possédant une base de Schauder. Ensuite, afin d'être en mesure d'étudier les propriétés asymptotiques du système, on se place dans les espaces de type c_0 à poids associés aux espaces étudiés au chapitre 1.

Pour des potentiels à décroissance exponentielle, on voit que l'unicité de la mesure de Gibbs n'est pas suffisante pour assurer la convergence du système en temps infini pour toute condition initiale dans l'espace c_0 associé : on met en évidence un exposant critique de la vitesse de croissance exponentielle de la suite formant la condition initiale permettant la convergence du système. La convergence se fait alors à vitesse exponentielle.

Pour des potentiels à décroissance comme l'inverse d'une fonction polynômiale, on constate que l'unicité de la mesure de Gibbs dans une classe convenable entraîne la convergence du système vers l'unique mesure gaussienne centrée de densité spectrale $\frac{1}{J}$ quelle que soit la condition initiale dans l'espace associé. La convergence est alors à vitesse exponentielle. En cas de transition de phase, on exhibe pour chaque phase pure un ensemble de conditions initiales pour lesquelles le système converge vers la phase. Pour certaines conditions initiales déterministes ou aléatoires, on détermine la vitesse de convergence sous des hypothèses sur le zéro de \hat{J} analogues à celles formulées au chapitre 2 .

Le chapitre 4 montre comment on peut discrétiser le système différentiel étudié au chapitre 3 afin de construire une chaîne de Markov inhomogène à temps discret admettant les phases pures associées à l'interaction comme limites. Les paramètres de l'interaction étant fixés, il faut choisir le pas de l'algorithme. Nous donnons quelques indications quant au choix visant à l'obtention de la vitesse de convergence la plus rapide possible – on constate là aussi que la convergence est plus rapide en l'absence de transition de phase. Enfin, nous mettons concrètement en oeuvre cet algorithme sur machine afin de simuler la convergence du système pour des interactions sur \mathbb{Z}^3 aux plus

proches voisins : on constate, conformément à la théorie, que le comportement asymptotique du système dépend de la condition initiale en cas de transition de phase, mais pas en cas d'unicité.

Chapitre 1

Champs de Gibbs gaussiens sur $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$

Introduction

Ainsi que nous l'avons mentionné dans l'introduction, le point de départ de ce travail est la question posée par Dobrushin en 1966 : comment décrire les champs aléatoires sur un réseau soumis à des distributions conditionnelles gaussiennes ? On peut la formuler de cette façon : quelle place donner aux lois gaussiennes sur un réseau dans la théorie des mesures de Gibbs ? Alors que les premiers éléments de réponse, significatifs, sont donnés par Rosanov en 1967, la résolution théorique ne fut achevée par Dobrushin et Künsch qu'en 1980. Ce théorème, que nous allons énoncer dans quelques pages, est un théorème difficile qui, curieusement, a été assez peu commenté, si ce n'est dans le traité de Georgii déjà mentionné. La difficulté de ce théorème réside essentiellement dans la compréhension de sa portée. En effet, le résultat de structure établi par Dobrushin et Künsch est essentiellement abstrait, puisqu'il établit un lien théorique entre l'ensemble des mesures de Gibbs et le noyau – dont le calcul explicite est pour le moins difficile – d'un certain opérateur défini sur une partie de $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$. Dobrushin nous livre dans son article quelque clefs pour l'appréhension du résultat : il suggère que des restrictions (par exemple sur le support) sur l'ensemble des mesures de Gibbs considérées permettraient d'obtenir d'avantage d'informations. Il obtient lui-même des résultats fins pour des potentiels décroissant comme l'inverse d'un polynôme. Ici, nous allons considérer une classe de mesures de Gibbs qui est plus large que celle considérée par Dobrushin à la fin de son article, voir nos corollaires 1.3 et 1.4.

En section 1.1, nous allons commencer par introduire la notion de me-

sure de Gibbs, puis, après avoir introduit les notations nécessaires, nous citons les résultats de Dobrushin et Künisch dont nous donnons quelques brefs commentaires. Ensuite, sous l'hypothèse que l'interaction est à décroissance exponentielle, nous donnons une condition nécessaire et suffisante pour l'unicité d'une mesure de Gibbs en termes d'existence d'une racine d'une certaine fonction dans une couronne. C'est alors que nous introduisons les espaces de suites et les familles de mesure qui nous serviront tout au long de notre travail. Nous montrons que l'ensemble des potentiels quadratiques symétriques pour lesquels on a existence et unicité de la mesure de Gibbs – avec les mêmes restrictions – est connexe par arcs.

Ensuite, en section 1.2, nous étudions l'ensemble des mesures de Gibbs sur $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$ associées à une interaction à décroissance exponentielle dépendant de certains paramètres : nous trouvons pour quelles valeurs de ces paramètres il y a existence ou unicité d'une mesure de Gibbs et nous décrivons complètement l'ensemble des mesures de Gibbs.

Enfin, en section 1.3, nous remarquons que sous les restrictions que nous nous sommes imposées, nous récupérons la stabilité de la propriété d'unicité de la mesure de Gibbs lorsque le potentiel est soumis à de petites perturbations. Cette stabilité, habituelle dans le cas d'un système à ensemble d'états compact, est perdue dans le cas non compact si l'on ne fait pas de restriction sur l'ensemble des mesures de Gibbs.

Notations

Nous appelons *champ aléatoire* sur le réseau \mathbb{Z}^d une mesure de probabilité sur $\Omega = \mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$, *i.e.* un élément de $\mathcal{P}(\Omega)$. Comme d'habitude, pour $i \in \mathbb{Z}^d$, on note X_i la variable aléatoire projection canonique sur la i -ème composante.

Introduisons le concept de *mesure de Gibbs*. Chaque $\omega \in \Omega$ peut être considéré comme une application de \mathbb{Z}^d dans \mathbb{R} . On notera ω_Λ sa restriction à Λ . Ainsi, si A et B sont deux parties disjointes de \mathbb{Z}^d et $(\omega, \eta) \in \mathbb{R}^A \times \mathbb{R}^B$, $\omega\eta$ représente la concaténation de ω et η , c'est à dire l'élément $z \in \mathbb{R}^{A \cup B}$ vérifiant

$$z_i = \begin{cases} \omega_i & \text{si } i \in A \\ \eta_i & \text{si } i \in B \end{cases}$$

Pour toute partie finie Λ de \mathbb{Z}^d , on définit $\sigma(\Lambda)$ comme étant la tribu engendrée par la famille de variables aléatoires $\{X_i, i \in \Lambda\}$.

Pour toute partie finie Λ de \mathbb{Z}^d , soit Φ_Λ une fonction $\sigma(\Lambda)$ -mesurable à valeurs réelles. La famille $(\Phi_\Lambda)_\Lambda$, où Λ décrit l'ensemble des parties finies de \mathbb{Z}^d , est appelé un *potentiel d'interaction*, ou simplement un potentiel. Pour

une partie finie Λ de \mathbb{Z}^d , la quantité

$$H_\Lambda = \sum_{B: B \cap \Lambda \neq \emptyset} \Phi_B$$

est appelée le *hamiltonien* sur le volume Λ . Souvent, H_Λ ne peut être défini que sur une partie de $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$. Nous supposons qu'il existe une partie $\tilde{\Omega}$ de Ω telle que

$$\forall \Lambda, \forall \omega \in \tilde{\Omega} \quad \sum_{B: B \cap \Lambda \neq \emptyset} |\Phi_B(\omega)| < +\infty$$

La famille $(H_\Lambda)_\Lambda$ est appelé le Hamiltonien.

On définit la *portée de l'interaction* comme étant la borne supérieure des diamètres des ensembles Λ pour lesquels Φ_Λ n'est pas identiquement nulle.

Nous définissons à présent la *fonction de partition* Z_Λ : en notant λ pour la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R} , on pose

$$Z_\Lambda(\omega) = \int_{\mathbb{R}^\Lambda} \exp(-H_\Lambda(\eta_\Lambda \omega_{\Lambda^c})) d\lambda^{\otimes \Lambda}(\eta_\Lambda)$$

Par convention, on pose $\exp(-H_\Lambda(\eta_\Lambda \omega_{\Lambda^c})) = 0$ quand le Hamiltonien n'est pas défini.

On suppose que pour chaque ω de $\tilde{\Omega}$, on a $0 < Z_\Lambda(\omega) < +\infty$. Dès lors, on peut définir pour toute fonction mesurable bornée f et pour tout $\omega \in \tilde{\Omega}$,

$$T_\Lambda f(\omega) = \frac{\int_{\mathbb{R}^\Lambda} \exp(-H_\Lambda(\eta_\Lambda \omega_{\Lambda^c})) f(\eta_\Lambda \omega_{\Lambda^c}) d\lambda^{\otimes \Lambda}(\eta_\Lambda)}{Z_\Lambda(\omega)}.$$

On remarque que $T_\Lambda f(\omega)$ ne dépend que de ω_{Λ^c} . L'opérateur T_Λ peut être considéré comme un noyau de transition au sens large, \mathbb{Z}^d jouant le rôle que joue le temps dans les processus markoviens classiques.

Si une mesure μ sur Ω est telle que $\mu(\tilde{\Omega}) = 1$, on dit que μ est une mesure de Gibbs si pour chaque fonction mesurable bornée f et pour chaque volume fini Λ de \mathbb{Z}^d , on a

$$E_\mu(f | (X_i)_{i \in \Lambda^c}) = T_\Lambda f(X) \quad \mu \text{ p.s.}$$

1.1 Résultats d'existence et d'unicité pour des interactions quadratiques générales

1.1.1 Le hamiltonien quadratique

Nous introduisons maintenant les trois paramètres qui caractérisent un *potentiel quadratique*.

Il s'agit de $J : \mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{R}$ une suite paire vérifiant $\sum_{i \in \mathbb{Z}^d} |J(i)| < +\infty$, $h \in \mathbb{R}$ et β un réel strictement positif, interprété physiquement comme l'inverse de la température absolue.

Ces trois paramètres étant fixés, notre objet est l'étude des champs aléatoires gibbsiens μ associés au potentiel $\Phi^{J,h,\beta}$ défini sur Ω par

$$\Phi_{\Lambda}^{J,h,\beta}(\omega) = \begin{cases} \beta(\frac{1}{2}J(0)\omega_i^2 + h\omega_i) & \text{si } \Lambda = \{i\} \\ \beta J(i-j)\omega_i\omega_j & \text{if } \Lambda = \{i, j\}, i \neq j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.1)$$

Ainsi, le hamiltonien correspondant est égal à

$$H_{\Lambda}(\omega) = \frac{\beta}{2} \sum_{i \in \Lambda} \omega_i [h + \sum_{j \in \Lambda} J(i-j)\omega_j] + \beta \sum_{i \in \Lambda, j \in \Lambda^c} J(i-j)\omega_i\omega_j. \quad (1.2)$$

On peut définir

$$\tilde{\Omega} = \{\omega \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}, \quad \forall i \in \mathbb{Z}^d \quad \sum_{j \in \mathbb{Z}^d} |J(i-j)\omega_j| < +\infty\}.$$

Sur $\tilde{\Omega}$, H_{Λ} est bien défini. Comme il est manifeste qu'il ne serait pas possible de choisir un $\tilde{\Omega}$ plus grand, ce choix apparaît canonique.

À (J, h, β) fixé, on note $\mathfrak{G}_{J,h}^{\beta}$ l'ensemble des mesures de Gibbs sur $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$ associées au hamiltonien défini en (1.2). Si $\mathfrak{G}_{J,h}^{\beta}$ contient plus d'un point, on dit qu'il y a transition de phase. $\mathfrak{G}_{J,h}^{\beta}$ est un ensemble convexe. On appelle phases pures ses points extrémaux. (Pour des résultats généraux sur les mesures de Gibbs, on pourra se rapporter à Georgii [18].)

Remarques Il est d'usage, en physique théorique, d'adopter l'écriture $e^{-\beta H}$, montrant bien le rôle particulier de β , qui est l'inverse de la température absolue et est donc un paramètre extérieur au système en interaction étudié, mais a une influence déterminante sur celui-ci : l'exemple le plus célèbre en est le modèle d'Ising en dimension supérieure ou égale à 2 – $d = 2$ modélise des films adsorbés, tandis que $d = 3$ modélise un aimant uni-axial. Dans ce

modèle, on a démontré qu'il y avait transition de phase à basse température tandis qu'il y a une phase unique à haute température. *A contrario*, dans le cadre quadratique qui nous intéresse, nous allons voir que le paramètre β est sans influence sur l'existence de transition de phase, ce qui nous incite à ne pas lui faire jouer un rôle particulier.

Le paramètre h doit être considéré comme un champ – par exemple magnétique – ambiant qui détermine le comportement moyen du système. Dans le modèle d'Ising, ainsi que, comme nous le verrons, dans le cas présent, la connaissance du cas $h = 0$ est essentielle – et délicate, et il est parfois possible d'en déduire des résultats pour h non nul.

Ainsi, c'est J qui est réellement le paramètre déterminant et qui nous indique de quelle manière les différents sites interagissent, nonobstant la valeur des paramètres extérieurs. Nous serons donc souvent appelé, par commodité de langage, à employer le mot de potentiel pour désigner le seul élément J .

Quelques notations supplémentaires sont nécessaires pour introduire les propositions 1 et 2 simultanément obtenues par Dobrushin[1] et Künsch[28], et qui sont les bases de notre travail .

Pour $z = (z_1, \dots, z_d) \in \mathbb{C}^d$ et $n = (n_1, \dots, n_d) \in \mathbb{Z}^d$, on pose

$$z^n = \prod_{i=1}^n z_i^{n_i} \text{ et } |n| = \sum_{i=1}^d |n_i|$$

On définit le tore \mathbb{U} par

$$\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C}^d, \forall i \in [1..d] |z_i| = 1\}$$

Il convient d'introduire \hat{J} , la transformée de Fourier de J , définie sur une partie de \mathbb{C}^d par

$$\hat{J}(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} J(n) z^n \quad (1.3)$$

chaque fois que la série considérée est absolument convergente. Comme J est sommable, il est clair que \hat{J} définit toujours une fonction continue sur \mathbb{U} .

Proposition 1.1. *Les paramètres (J, h, β) étant fixés, l'ensemble $\mathfrak{G}_{J,h}^\beta$ des mesures de Gibbs est non vide si et seulement si les trois conditions suivantes sont vérifiées :*

1. $\hat{J}(\mathbb{U}) \subset \mathbb{R}^+$
2. $\int_{\mathbb{U}} \frac{1}{\hat{J}(z)} dz < \infty$, où dz est la mesure de Haar normalisée sur le tore \mathbb{U} .
3. $M_h^J = \{(u_n)_{n \in \mathbb{Z}^d} \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d} : \forall k \in \mathbb{Z}^d, \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} J(n) u_{k+n} = h\} \neq \emptyset$.

Remarques

1. Lors de la preuve de la proposition 1.1, il apparaît que la première condition implique que $0 < Z_\Lambda(\omega) < +\infty$ pour $\omega \in \tilde{\Omega}$.
2. D'autre part, même si nous allons immédiatement exhiber des mesures de Gibbs pour cet hamiltonien, la démarche pour prouver l'existence d'une mesure de Gibbs n'est pas tellement différente de ce que l'on voit habituellement. En effet, on peut montrer que la condition $\int_{\mathbb{U}} \frac{1}{j}(z) dz < \infty$ est équivalente à la tension de la famille des mesures de Gibbs à condition nulle fixée à l'extérieur d'une suite croissante de volumes $(\Lambda_n)_{n \geq 1}$ remplissant l'espace. Classiquement, toute mesure limite est alors une mesure de Gibbs.

Proposition 1.2. *Sous les hypothèses de la proposition 1.1, les phases pures sont les mesures gaussiennes μ sur $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$ de covariance $(i, j) \mapsto \int_{\mathbb{U}} \frac{z^{i-j}}{\beta j(z)} dz$ et dont le vecteur espérance $(E_\mu(X_n))_{n \in \mathbb{Z}^d}$ appartient à M_h^J .*

(On dit alors que $\frac{1}{j}$ est la densité spectrale de la phase pure.)

Remarques

1. La théorie générale des champs gibbsiens nous enseigne que $\mathfrak{G}_{J,h}^\beta$ est un simplexe de Choquet, ce qui veut dire que chaque $\mu \in \mathfrak{G}_{J,h}^\beta$ peut être représenté comme un mélange de phases pures. La proposition 1.2 implique alors qu'en cas d'existence, les mesures de Gibbs associées à cette interaction sont exactement les mesures qui peuvent s'écrire comme la convolution de la mesure gaussienne centrée dont la covariance est donnée dans la proposition 2 avec n'importe quelle mesure dont le support est inclus dans M_h^J . Ainsi, l'absence de transition de phase est équivalent au fait que M_h^J soit un singleton, ou par linéarité, que M_0^J soit réduit à $\{0\}$ – comme M_0^J est un espace vectoriel, on note 0 la suite nulle.
2. Comme souvent dans la théorie des mesures de Gibbs, les symétries du système favorisent la transition de phase. Soit $G = M_0^J$: G est un groupe additif qui opère sur Ω et laisse stable à la fois la mesure de référence $\lambda^{\otimes \mathbb{Z}^d}$ et le hamiltonien : pour tout $g \in G$, pour tout Λ fini et tout $\omega \in \tilde{\Omega}$, on a

$$H_\Lambda(g.\omega) = H_\Lambda(\omega) + \text{constante},$$

de sorte que G opère sur $\mathfrak{G}_{J,h}^\beta$. Comme aucune probabilité sur Ω n'est stable par translation non nulle, on pouvait voir dès le départ que dès que G n'est pas réduit à $\{0\}$ et que $\mathfrak{G}_{J,h}^\beta$ est non vide, il y a transition de phase.

3. La proposition 1.2 montre qu'il y a une bijection entre $\mathfrak{G}_{J,h}^\beta$ et $\mathfrak{G}_{\beta J, \beta h}^1$.

1.1.2 Unicité sous certaines hypothèses de croissance

Mis à part le cas d'une interaction à portée finie élucidé par Künsch (voir [28]) quand le réseau est \mathbb{Z} , il est très difficile de donner une description complète de M_0^J . Nous le ferons cependant un peu plus loin la description complète de M_0^J pour un potentiel particulier à décroissance exponentielle, mais il faut garder à l'esprit qu'une telle description n'est pas possible en toute généralité.

Nous considérerons – et cela a un sens physique – uniquement les suites de M_0^J qui ne croissent pas trop vite. Par exemple, Dobrushin considère dans [1] la classe des suites à croissance lente. En supposant que le potentiel décroît exponentiellement, nous considérons ici un grand sous-ensemble de M_0^J : les suites qui ne croissent pas plus vite qu'une suite exponentielle de référence.

Comme nos méthodes sont générales, nous allons d'abord établir un résultat pour des classes générales de potentiels à croissance "sous-exponentielle", appelées classes de type \mathcal{E} . Notre résultat contient celui de Dobrushin mentionné plus haut (voir le corollaire 1.3) et le cas des potentiels à décroissance exponentielle (voir corollaires 1.4 et 1.5).

Introduisons quelques définitions.

On dit qu'une suite $a =: (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_*^+)^{\mathbb{N}}$ est *de type \mathcal{E}* si elle vérifie

- $a_0 = 1$
- $(a_n)_n$ est croissante au sens large.
- (a_n) est sous-multiplicative, *i.e.* $\forall n, p \in \mathbb{N} \ a_{n+p} \leq a_n a_p$

Définissons maintenant l'exposant caractéristique r_a d'une suite a de type \mathcal{E} par

$$r_a = \inf_{n \geq 1} a_n^{1/n}.$$

Il est clair que $0 \leq r_a < +\infty$. On verra ultérieurement que l'on a en fait $1 \leq r_a < +\infty$.

Exemple fondamental : Étant donné un réel $\alpha \geq 1$, la suite

$$a = (a_n) = (\alpha^n) \tag{1.4}$$

est de type \mathcal{E} et son exposant caractéristique est α . On l'appellera suite de référence d'exposant α .

On pose, pour a de type \mathcal{E}

1.

$$A_a = \{(u_n)_{n \in \mathbb{Z}^d} \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}^d}, \|u\|_{A_a} = \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} |u_n| a_{|n|} < +\infty\} \quad (1.5)$$

A_a sera l'espace où vit le potentiel.

2.

$$B_a = \{(u_n)_{n \in \mathbb{Z}^d} \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}^d}, \|u\|_{B_a} = \sup_{n \in \mathbb{Z}^d} \frac{|u_n|}{a_{|n|}} < +\infty\} \quad (1.6)$$

On va considérer l'intersection de M_0^J et B_a .

3. On a besoin d'introduire la couronne

$$\mathbb{U}_r = \{z \in \mathbb{C}^d, \forall i \in [1..d], \frac{1}{r} \leq |z_i| \leq r\} \text{ avec } r \geq 1.$$

(Remarquons que $\mathbb{U}_1 = \mathbb{U}$.)

Remarque : Pour un potentiel $J \in A_a$, la fonction \hat{J} , définie par (1.3), est bien définie sur \mathbb{U}_{r_a} .

Preuve : Pour tout $z \in \mathbb{U}_{r_a}$, on a

$$\forall k \in [1..d], \forall n \in \mathbb{Z}^d, |z_i^{n_i}| \leq r_a^{|n_i|}, \text{ d'où } |z^n| \leq r_a^{|n|}$$

donc

$$\forall n \in \mathbb{Z}^d, |J(n)z^n| \leq |J(n)r_a^{|n|}| \leq |J(n)a_{|n|}|,$$

d'où

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}^d} |J(n)z^n| \leq \|J\|_{A_a} \quad (1.7)$$

La série est donc absolument convergente.

■

Rappelons la définition du produit de convolution de deux suites.

Pour deux suites $u = (u_n)_{n \in \mathbb{Z}^d}, v = (v_n)_{n \in \mathbb{Z}^d}$ telles que

$$\forall n \in \mathbb{Z}^d, \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} |u_k v_{n-k}| < +\infty,$$

le produit de convolution $u * v$ de u par v est défini par

$$\forall n \in \mathbb{Z}^d, (u * v)_n = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} u_k v_{n-k}.$$

Lemme 1. $(A_a, \|\cdot\|_{A_a}, *)$ est une algèbre de Banach unitaire.

Preuve : Nous laissons de côté la preuve de la complétude de l'espace, qui est bien connue, pour ne nous intéresser qu'à la structure d'algèbre. Soient $(u, v, w) \in A_a^3$. Montrons tout d'abord que la famille $(a_n u_k v_l w_{n-k-l})_{(n,k,l) \in (\mathbb{Z}^d)^3}$ est sommable. L'inégalité

$$a_n \leq a_k a_l a_{n-k-l}$$

implique

$$\begin{aligned} |a_n u_k v_l w_{n-k-l}| &\leq |a_k u_k| |a_l v_l| |a_{n-k-l} w_{n-k-l}| \\ \text{d'où } \sum_{(n,k,l) \in (\mathbb{Z}^d)^3} |a_n u_k v_l w_{n-k-l}| &\leq \|u\|_{A_a} \|v\|_{A_a} \|w\|_{A_a} < +\infty \end{aligned}$$

On note δ_n la suite dont toutes les coordonnées sont nulles, sauf la n -ième, qui vaut 1.

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}^d} |(u * w)_n| a_n \leq \sum_n \sum_k |u_k w_{n-k}| a_n \leq \|u\|_{A_a} \|w\|_{A_a}$$

en utilisant l'inégalité précédente avec $v = \delta_0$. Ceci montre tout à la fois que $u * w$ est bien défini (puisque $\forall n \ a_n > 0$), que $u * w \in A_a$, avec

$$\|u * w\|_{A_a} \leq \|u\|_{A_a} \|w\|_{A_a}.$$

La commutativité ne pose aucun problème. On vérifie aisément que δ_0 est élément neutre, avec $\|\delta_0\|_{A_a} = a_0 = 1$. La seule propriété non évidente à vérifier est l'associativité.

On a vu que

$$\sum_n a_n \sum_{k,l} |u_k v_l w_{n-k-l}| < +\infty$$

Comme $a_n > 0$, cela implique que, pour tout n , la famille $u_k v_l w_{n-k-l}$ est sommable. On est donc en droit d'écrire

$$(u * (v * w))_n = \sum_k u_k (v * w)_{n-k} = \sum_k u_k \sum_l v_l w_{(n-k)-l} = \sum_{k,l} u_k v_l w_{n-k-l}$$

On pose alors $p = k + l$ (sommation par paquets). D'où

$$(u * (v * w))_n = \sum_{p,l} u_{p-l} v_l w_{n-p} = \sum_p \left[\sum_l u_{p-l} v_l \right] w_{n-p} = \sum_p (u * v)_p w_{n-p} = ((u * v) * w)_n$$

■

Lemme 2.

$$\forall u, v \in A_a \quad \forall z \in \mathbb{U}_{r_a} \quad \widehat{u * v}(z) = \hat{u}(z) \hat{v}(z) \quad (1.8)$$

Preuve : D'après (1.7), on a pour $z \in \mathbb{U}_{r_a}$

$$|\hat{J}(z)| \leq \|J\|_{A_a},$$

donc à z fixé $J \mapsto \hat{J}(z)$ est une forme linéaire continue sur A_a ; ainsi les deux membres de (1.8) sont des formes bilinéaires continues sur A_a : il suffit donc de vérifier qu'elles coïncident sur une famille engendrant un espace vectoriel dense dans A_a ; or l'identité est vérifiée pour $u = \delta_n$ et $v = \delta_p$, ce qui est immédiat.

■

Nous allons rappeler quelques résultats de la théorie des algèbres de Banach utiles pour la suite (pour un exposé clair et rapide, on peut par exemple se rapporter à Pedersen [34], chapitre 4.)

Soit B une algèbre de Banach dont l'unité est notée e : on note $G(B)$ l'ensemble des éléments inversibles de B . Il est facile de voir que $G(B)$ est ouvert. Quand x est un élément de B , le spectre de x est, par définition, la partie de \mathbb{C} :

$$\text{Spec}(x) = \{\lambda \in \mathbb{C}, x - \lambda e \notin G(B)\}.$$

C'est un compact de \mathbb{C} . On note $\rho(x)$ le rayon spectral de x , *i.e* le module maximal des éléments du spectre de x . Rappelons la formule du rayon spectral:

$$\rho(x) = \inf_{n \geq 1} \|x^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

Soit Δ l'ensemble des morphismes d'algèbre continus de B dans \mathbb{C} non identiquement nuls: de tels morphismes sont appelés *caractères*. Le résultat qui suit est un résultat puissant de la théorie de Gelfand:

$$\text{Spec}(x) = \{\chi(x); \chi \in \Delta\}.$$

Le lemme 2 montre que pour tout élément z de \mathbb{U}_{r_a} , on peut définir un caractère χ_z par

$$c \mapsto \chi_z(c) = \hat{c}(z). \tag{1.9}$$

Énonçons à présent le théorème principal de cette sous-section.

Théorème 1.1. *Soit $J \in A_a$ où a est une suite de type \mathcal{E} . On a équivalence entre*

1. $M_0^J \cap B_a = \{0\}$
2. $J \in G(A_a)$
3. \hat{J} ne s'annule pas sur \mathbb{U}_{r_a} .

Preuve de 1 \Rightarrow 3 Soit $z \in \Omega_{r_a}$ vérifiant $\hat{J}(z) = 0$. On a

$$\forall k \in \mathbb{Z}^d \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} J(n) z^{n+k} = 0$$

En prenant parties réelles et imaginaires, on voit que les suites $u_n = \operatorname{Re}(z^n)$ et $v_n = \operatorname{Im}(z^n)$ sont dans M_0^J . Comme $z \neq 0$, l'une des deux suites n'est pas identiquement nulle, par exemple u . Il reste à voir que $u \in B_a$. On a, d'une part

$$|u_n| \leq |z^n| \leq r_a^{|n|}$$

D'autre part, par définition de r_a , $a_n \geq r_a^{|n|}$. D'où $u \in B_a$.

Preuve de 2 \Rightarrow 1 Prouvons d'abord le lemme

Lemme 3. 1. $\forall c \in A_a, \forall d \in B_a \quad c * d \in B_a$, avec $\|c * d\|_{B_a} \leq \|c\|_{A_a} \|d\|_{B_a}$
 2. $\forall c, c' \in A_a, d \in B_a \quad c * (c' * d) = (c * c') * d$

Preuve :

$$|(c * d)_n| \leq \sum_k |c_k| |d_{n-k}| \leq \sum_k |c_k| \|d\|_{B_a} a_{n-k} \leq \sum_k |c_k| \|d\|_{B_a} a_{|n|} a_{|k|} \leq a_{|n|} \|c\|_{A_a} \|d\|_{B_a}$$

Alors $c * d \in B_a$, avec $\|(c * d)\|_{B_a} \leq \|c\|_{A_a} \|d\|_{B_a}$.

Tout d'abord, montrons que la suite double $(c'_k c_l d_{n-k-l})_{k,l}$ est sommable.

$$\sum_{k,l} |c'_k c_l d_{n-k-l}| = \sum_k |c'_k| \sum_l |c_l d_{n-k-l}| \leq \sum_k |c'_k| a_{n-k} \|c\|_{A_a} \|d\|_{B_a} \leq a_{|n|} \|c'\|_{A_a} \|c\|_{A_a} \|d\|_{B_a}$$

Ensuite, comme précédemment, on peut écrire

$$(c * (c' * d))_n = \sum_k c_k (c' * d)_{n-k} = \sum_k c_k \sum_l c'_l d_{(n-k)-l} = \sum_{k,l} c_k c'_l d_{n-k-l}$$

Alors, on pose $p = k + l$ (sommation par paquets). D'où

$$(c * (c' * d))_n = \sum_{p,l} c_{p-l} c'_l d_{n-p} = \sum_p \left[\sum_l c_{p-l} c'_l \right] d_{n-p} = \sum_p (c * c')_p d_{n-p} = ((c * c') * d)_n$$

■

On peut maintenant démontrer l'implication $2 \Rightarrow 1$:
Soit $u \in M_0^J \cap B_a$ et $J \in G(A_a)$: comme J est paire, on peut écrire $J * u = 0$.
Mais ceci implique que

$$u = (J^{-1} * J) * u = J^{-1} * (J * u) = J^{-1} * 0 = 0.$$

Preuve de $3 \Rightarrow 2$ Cela va découler du lemme 4 et des résultats de théorie spectrale mentionnés plus haut.

Lemme 4.

$$\Delta = \{\chi_z; z \in \mathbb{U}_{r_a}\}$$

Preuve : On a déjà montré que les χ_z définis en (1.9) étaient des caractères. Montrons la réciproque : soient donc $\chi \in \Delta$ et $c \in A_a$. On note (e_1, \dots, e_d) la base canonique de \mathbb{C}^d . Pour $n \in \mathbb{Z}^d$, on rappelle que δ_n est la suite indexée par \mathbb{Z}^d dont toutes les coordonnées sont nulles, exceptée la $n^{\text{ème}}$ qui vaut 1.

On peut représenter c sous forme d'une série fortement convergente :

$$c = \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} c_n \delta_n = \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} c_n \delta_{e_1}^{*n_1} * \dots * \delta_{e_d}^{*n_d},$$

la seconde égalité provenant de l'identité $\delta_n * \delta_p = \delta_{n+p}$.

Si l'on pose $z = (\chi(\delta_{e_1}), \dots, \chi(\delta_{e_d}))$, la continuité de χ nous permet d'écrire

$$\chi(c) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} c_n z^n = \hat{c}(z)$$

Il ne reste plus qu'à prouver que $z \in \mathbb{U}_{r_a}$. On a, pour $1 \leq k \leq d$,

$$|\chi(\delta_{e_k})| \leq \rho(\delta_{e_k}) = \inf_{j \geq 1} \|\delta_{e_k}^{*j}\|_{A_a}^{1/j} = \inf_{j \geq 1} \|\delta_{je_k}\|_{A_a}^{1/j} = \inf_{j \geq 1} a_j^{1/j} = r_a$$

(Ici le rayon spectral est calculé au moyen de la formule du même nom.)

De même, $|\chi(\delta_{-e_k})| \leq r_a$. Donc $\chi(\delta_{-e_k}) = \chi(\delta_{e_k}^{-1}) = \chi(\delta_{e_k})^{-1}$. Ainsi, on a

$$\frac{1}{r_a} \leq |\chi(\delta_{e_k})| \leq r_a \tag{1.10}$$

Qui plus est, cette dernière inégalité montre au passage que $r_a \geq 1$, ainsi que nous l'avions annoncé au début de cette sous-section.

Il est maintenant clair que $\chi = \chi_z$, pour un certain z de \mathbb{U}_{r_a} . Ainsi le lemme est démontré.

■

Remarque : La formule

$$c_n = \int_{\mathbb{U}} \frac{\hat{c}(z)}{z^n} dz$$

montre que l'application $c \mapsto \hat{c}$ est injective. Le lemme 4 nous permet d'identifier \hat{c} avec l'application $\chi \mapsto \chi(c)$. La transformation de Gelfand, ainsi qu'on la nomme, est donc ici un isomorphisme algébrique : on dit alors que A_a est une algèbre semi-simple. Ceci sera très important plus tard, puisque cela nous permettra de travailler avec des fonctions plutôt qu'avec des suites.

On peut à présent prouver la dernière implication : \hat{J} ne s'annule pas sur \mathbb{U}_{r_a} signifie que pour tout $z \in \mathbb{U}_{r_a}$ $\chi_z(J) \neq 0$. Mais d'après le lemme 4, cela signifie que pour tout χ de Δ , $\chi(J) \neq 0$: ainsi 0 n'appartient pas au spectre de J et J est inversible.

■

Corollaire 1.1. *0 est la seule suite bornée de M_0^J si et seulement si \hat{J} ne s'annule pas sur \mathbb{U} .*

Preuve : Il suffit d'appliquer le théorème 1.1 à la suite constante $a_n = 1$.

■

Ce résultat a déjà été montré par Georgii ([18], chapitre 13), qui utilise à cet effet un célèbre théorème de Wiener sur les fonctions de classe A . (Ce théorème peut lui-même se déduire facilement du lemme 4.)

Corollaire 1.2. *Soit J un potentiel et $\alpha > 0$ tel que $\sum_{n \in \mathbb{Z}^d} |J(n)||n|^\alpha < +\infty$. Alors on a équivalence entre*

1. $M_0^J \cap \{(u_n)_{n \in \mathbb{Z}^d} : \sup_{n \in \mathbb{Z}^d} \frac{|u_n|}{1+|n|^\alpha} < +\infty\} = \{0\}$
2. \hat{J} ne s'annule pas sur \mathbb{U}

Preuve : On vérifie que la suite $a_n = 1 + 2^\alpha |n|^\alpha$ est de type \mathcal{E} avec $r_a = 1$ et on lui applique le théorème 1.2.

■

Définition On dit qu'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{Z}^d}$ est à décroissance rapide, lorsque pour chaque polynôme P , la suite $(u_n P(n))_{n \in \mathbb{Z}^d}$ est bornée. Cela est vérifié si et seulement si l'application $\theta \mapsto \hat{u}(e^{i\theta})$ est de classe C^∞ . On dit qu'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{Z}^d}$ est à croissance lente s'il existe un polynôme P telle que pour tout $n \in \mathbb{Z}^d$, $|u_n| \leq P(n)$.

Corollaire 1.3. *Si J est un potentiel à décroissance rapide et que \hat{J} ne s'annule pas sur \mathbb{U} , alors l'intersection de M_0^J et de l'ensemble des suites à croissance lente est réduite à 0.*

Preuve : C'est une conséquence du corollaire ci-dessus.

■

Ce résultat a déjà été montré par Dobrushin[1] en utilisant la théorie des distributions.

Définitions Pour simplifier les notations, pour $\alpha > 1$, on notera désormais A_α (resp. B_α) l'ensemble A_a (resp. B_a), où a est la suite de référence d'exposant $\alpha > 1$ définie par la formule

$$a = (a_n) = (\alpha^n). \quad (1.11)$$

On dit qu'un potentiel J est à décroissance exponentielle s'il vérifie l'une des conditions équivalentes suivantes :

1. $J \in A_a$ pour une certaine suite a de type \mathcal{E} vérifiant $r_a > 1$.
2. $J \in A_\eta$ pour un certain réel $\eta > 1$.
3. Il existe $K > 0$ et $0 \leq c < 1$ tels que $\forall n \in \mathbb{Z}^d, |J(n)| \leq Kc^{|n|}$.

(On étudiera en section 1.2 le potentiel géométrique sur \mathbb{Z} vérifiant $\exists K, c \in \mathbb{R} \quad \forall n \neq 0 J(n) = Kc^n$.)

Corollaire 1.4. *Soit J à décroissance exponentielle tel que \hat{J} est strictement positive sur \mathbb{U} . Alors il existe $a > 1$ tel que $M_0^J \cap B_a = \{0\}$.*

Preuve : Soit $r > 1$ tel que $J \in A_r$. On veut montrer qu'il existe $a > 1$ tel que \hat{J} ne s'annule pas sur Ω_a . On raisonne par l'absurde et on suppose donc que

$$\forall n \geq n_0 \exists z_n \in \Omega_{1+1/n} \hat{J}(z_n) = 0.$$

La suite $(z_n)_{n \geq n_0}$ est bornée, donc admet une valeur d'adhérence z : on a clairement $z \in \mathbb{U}$ et comme \hat{J} est continue, $\hat{J}(z) = 0$: contradiction.

Il existe donc η , vérifiant $1 < \eta < r$ est tel que \hat{J} ne s'annule pas sur Ω_η . Comme $J \in A_r$, *a fortiori* $J \in A_\eta$. Le théorème 1.1 donne alors le résultat désiré.

■

Corollaire 1.5. *Soit J un potentiel à décroissance exponentielle tel que \hat{J} est strictement positive sur \mathbb{U} . Alors $M_0^J \cap H = \{0\}$, où*

$$H = \bigcap_{\alpha > 1} B_\alpha.$$

Preuve : C'est une conséquence immédiate du corollaire 1.4.

■

Ce nouveau résultat doit être comparé avec le corollaire 1.3, dont les hypothèses sont plus faibles, mais les conclusions aussi. Puisque la condition de décroissance exponentielle est physiquement raisonnable, nous avons prouvé un critère simple pour l'unicité de la mesure de Gibbs au sein d'une très grande classe de champs. La restriction est moins forte que dans le corollaire 1.3, puisque H est beaucoup plus large que la classe des suites à croissance lente – considérer par exemple la suite $u_n = \exp(-\sqrt{|n|})$. Les suites de H sont parfois appelées hyper-distributions et sont liées aux fonctions périodiques dont la série de Fourier est absolument convergente. (Voir par exemple [25].)

Nous voulons utiliser les résultats précédents pour émettre des conditions sur μ . Étant donnée une suite $(a_n)_n$ de type \mathcal{E} , on définit

$$\mathcal{P}_\alpha(\Omega) = \{\mu \in \mathcal{P}(\Omega) \mid \mu(B_\alpha) = 1\};$$

et pour $\alpha \geq 1$,

$$\mathcal{P}_\alpha(\Omega) = \{\mu \in \mathcal{P}(\Omega) \mid \mu(B_\alpha) = 1\}.$$

Théorème 1.2. *Soit $J \in A_a$ où a est une suite de type \mathcal{E} vérifiant*

$$\exists K > 0, \forall n \geq 2 \quad a_n \geq K\sqrt{\ln n} \quad (1.12)$$

On suppose que $\hat{J}(\mathbb{U}) \subset \mathbb{R}^+$.

Alors, on a équivalence entre

1. $M_0^J \cap B_a = \{0\}$
2. $J \in G(A_a)$
3. \hat{J} ne s'annule pas sur \mathbb{U}_{r_a} .
4. $|\mathfrak{G}_{J,h}^\beta \cap \mathcal{P}_\alpha(\Omega)| = 1$.

Preuve : Supposons que 1., 2. et 3. –qui sont équivalentes– sont vérifiées. Comme \hat{J} ne s'annule pas sur \mathbb{U} , qui est compact, on voit que $\frac{1}{\hat{J}}$ est bornée, et donc intégrable. Les propositions 1 et 2 impliquent que la mesure stationnaire gaussienne de moyenne $\frac{h}{\hat{J}(1)}$ et de densité spectrale $\frac{1}{\hat{J}}$ est dans $\mathfrak{G}_{J,h}^\beta$. Soit $(Y_i)_{i \in \mathbb{Z}^d}$ une variable aléatoire dont la loi sous P est cette mesure gaussienne. On a

$$P(|Y_i| \geq La_{|i|}) \leq \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}La_{|i|}} e^{-\frac{L^2 a_{|i|}^2}{2\sigma^2}}$$

Si l'on choisit L tel que $\frac{L^2 K^2}{2\sigma^2} \geq d+1$, on a, pour $|i| \geq 2 \frac{L^2 a_{|i|}^2}{2\sigma^2} \geq (d+1) \ln |i|$, d'où

$$P(|Y_i| \geq La_{|i|}) \leq \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}La_{|i|}} \frac{1}{|i|^{d+1}}$$

Le lemme de Borel-Cantelli implique alors que

$$P(|Y_i| \geq La_{|i|} \text{ i.s.}) = 0.$$

Donc $(Y_i)_{i \in \mathbb{Z}^d} \in B_a$ presque sûrement.

Nous venons de prouver que $|\mathfrak{G}_{J,h}^\beta \cap \mathcal{P}_a(\Omega)| \geq 1$. Considérons maintenant $\mu \in \mathfrak{G}_{J,h}^\beta \cap \mathcal{P}_a(\Omega)$. D'après la proposition 1.2, on peut trouver des variables aléatoires $(Z_i), (Y_i)$ avec Z et Y indépendantes telles que $(Z_i)_{i \in \mathbb{Z}^d} \in M_0^J$ presque sûrement, (Y_i) comme précédemment, et la loi de $(Y_i + Z_i)_{i \in \mathbb{Z}^d}$ est μ . $Z + Y \in B_a$ p.s et $Y \in B_a$ p.s., donc $Z \in B_a$ p.s. On a $Z \in M_0^J \cap B_a$ p.s, et $M_0^J \cap B_a = \{0\}$. Alors, $Z = 0$ p.s. Ceci prouve que $|\mathfrak{G}_{J,h}^\beta \cap \mathcal{P}_a(\Omega)| = 1$.

Supposons maintenant que $|\mathfrak{G}_{J,h}^\beta \cap \mathcal{P}_a(\Omega)| = 1$. Soit $(X_i)_{i \in \mathbb{Z}^d}$ une réalisation de cette mesure. Soit $x \in M_0^J \cap B_a$. À l'aide de la proposition 1.2, on peut voir que la loi de $(X_i + x_i)_{i \in \mathbb{Z}^d}$ appartient à $\mathfrak{G}_{J,h}^\beta \cap \mathcal{P}_a(\Omega)$. Mais $|\mathfrak{G}_{J,h}^\beta \cap \mathcal{P}_a(\Omega)| = 1$, donc on obtient $x = 0$. Ainsi nous avons prouvé que $M_h^J \cap B_a = \{0\}$.
■

Remarques importantes

1. D'après la proposition 1.1, la condition 4. implique $\hat{J}(\mathbb{U}) \subset \mathbb{R}^+$. Ainsi, pour une suite a vérifiant (1.12), un potentiel $J \in A_a$ est tel que

$$|\mathfrak{G}_{J,h}^\beta \cap \mathcal{P}_a(\Omega)| = 1$$

si et seulement si \hat{J} ne s'annule pas sur \mathbb{U}_{r_a} et $\hat{J}(\mathbb{U}) \subset \mathbb{R}^+$.

2. On peut prendre par exemple $a_n = \sqrt{1 + \ln(1 + n)}$. Il est clair que cette suite vérifie (1.12). Voyons qu'elle est de type \mathcal{E} . A n fixé, posons

$$f(x) = (1 + \ln(1 + n))(1 + \ln(1 + x)) - (1 + \ln(1 + n + x))$$

On a $f(0) = 0$ et

$$f'(x) = \frac{1 + \ln(1 + n)}{1 + x} - \frac{1}{1 + n + x} \geq \frac{1}{1 + x} - \frac{1}{1 + n + x}.$$

Donc f est positive, d'où l'on déduit que $n \mapsto (1 + \ln(1 + n))$ est sous-multiplicative, et par suite $(a_n)_{n \geq 1}$ l'est aussi.

Le théorème qui suit montre que l'hypothèse (1.12) est en un certain sens optimale : si l'on imposait à la suite $(a_n)_{n \geq 0}$ de croître moins vite que $\sqrt{\ln}$, alors la mesure gaussienne centrée de densité spectrale $\frac{1}{J}$ aurait son support disjoint de B_a . (Rappelons que pour une mesure gaussienne μ et un espace vectoriel V , $\mu(V)$ ne peut valoir que 0 ou 1 – voir par exemple [6].)

1.1.3 Un calcul explicite de limite supérieure

Théorème 1.3. *Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}^d}$ un processus gaussien stationnaire centré admettant une densité spectrale. Alors, si $\sigma^2 > 0$ désigne la variance du processus, on a pour toute suite $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}^d}$ à termes strictement positifs de limite nulle*

$$\overline{\lim}_{|n| \rightarrow \infty} a_n X_n = \inf \left\{ \beta \geq 0, \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} a_n \exp\left(-\frac{\beta^2}{2\sigma^2 a_n^2}\right) < +\infty \right\}. \quad p.s. \quad (1.13)$$

En particulier

$$\overline{\lim}_{|n| \rightarrow \infty} \frac{X_n}{\sqrt{\ln |n|}} = \sqrt{2d}\sigma \quad p.s. \quad (1.14)$$

Preuve : Remarque préliminaire : Quelques intégrations par parties montrent que

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a^3} \right) \exp\left(-\frac{a^2}{2}\right) \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^{+\infty} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{a} \exp\left(-\frac{a^2}{2}\right)$$

Donc si l'on pose

$$\Psi(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^{+\infty} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt,$$

On a l'équivalent en $+\infty$:

$$\Psi(a) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{a} \exp\left(-\frac{a^2}{2}\right),$$

ce qui fait que la série considérée en 1.13 est de même nature que

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}^d} \Psi\left(\frac{\beta}{a_n \sigma}\right).$$

Posons

$$K = \inf \left\{ \beta \geq 0, \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} a_n \exp\left(-\frac{\beta^2}{2\sigma^2 a_n^2}\right) < +\infty \right\},$$

aval la convention $\inf \emptyset = +\infty$.

Si X est un processus défini sur un espace (Ω, \mathcal{A}, P) , il est facile de voir que l'ensemble

$$\{\omega \in \Omega, \overline{\lim}_{|n| \rightarrow \infty} a_n X_n(\omega) = K\}$$

est $\sigma(X)$ -mesurable. Dès lors, le résultat souhaité est une propriété de la mesure P_X , sans relation avec l'espace probabilisé utilisé : nous pouvons

donc choisir Ω et X à notre guise, du moment que P_X respecte les conditions imposées. Soit f la densité spectrale considérée. Nous allons directement travailler sur l'espace des trajectoires : on pose donc $\Omega = \mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$. On note π_n la projection canonique sur la n ième coordonnée. On pose $P = \mathcal{N}(0, 1)^{\otimes \mathbb{Z}^d}$, de sorte que sous la loi P , $(\pi_n)_{n \in \mathbb{Z}^d}$ est un bruit blanc. On note H_1 le sous-espace vectoriel fermé de $L^2_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), P)$ engendré par les π_n .

On note H_2 l'ensemble des éléments g de $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{U}, \mathcal{B}(\mathbb{U}), dz) - dz$ est la mesure de Haar normalisée sur \mathbb{U} – qui vérifient $g(\bar{z}) = \overline{g(z)}$. On constate aisément que H_2 est un \mathbb{R} -espace vectoriel. L'invariance de la mesure de Haar par $z \mapsto \bar{z}$ permet de voir que la restriction du produit scalaire à $H_2 \times H_2$:

$$\langle f, g \rangle_{H_2} = \int_{\mathbb{U}} \bar{f}g \, dz$$

est à valeurs réelles. Ainsi, on a pu munir H_2 d'une structure d'espace de Hilbert réel. On constate aisément qu'un élément g de $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{U})$ est dans H_2 si et seulement si ses coefficients de Fourier

$$c_n(g) = \langle \chi_n, g \rangle_{L_2}$$

sont tous réels. (On rappelle que l'on a défini $\chi_n(z) = z^n$.) Comme les $(\pi_n)_{n \in \mathbb{Z}^d}$ forment une base hilbertienne de H_1 et les $(\chi_n)_{n \in \mathbb{Z}^d}$ une base hilbertienne de H_2 , il existe un unique isomorphisme ψ de H_2 dans H_1 vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{Z}^d \quad \psi(\chi_n) = \pi_n.$$

Comme $f \in L^1$, on a $g = \sqrt{f} \in L^2$. f est à valeurs réelles positives et vérifie $f(z) = f(\bar{z})$, donc g aussi ; ce qui implique $g \in H_2$. On pose alors

$$X_n = \psi(\chi_n g).$$

Comme toute famille de H_1 , la famille $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}^d}$ est gaussienne centrée. D'autre part, pour $n, p \in \mathbb{Z}^d$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_P X_n X_p &= \langle X_n, X_p \rangle_{H_1} \\ &= \langle \psi(\chi_n g), \psi(\chi_p g) \rangle_{H_1} \\ &= \langle \chi_n g, \chi_p g \rangle_{H_2} \\ &= \int_{\mathbb{U}} \chi_{n-p} g^2 \, dz \\ &= \int_{\mathbb{U}} \chi_{n-p} f \, dz \end{aligned}$$

Ce qui montre que la loi de X sous P est bien la loi cherchée : elle est gaussienne, centrée, et a la covariance attendue.

Soit β un réel strictement compris entre 0 et K . (On étudiera à part le cas où $K = 0$). On peut trouver un réel $\varepsilon > 0$ tel que $\beta < \frac{K}{(1+\varepsilon)^2}$.

Si l'on note simplement c_k pour $c_k(g)$, on a dans H_2 , la décomposition

$$g = \sum_k c_k \chi_k,$$

d'où

$$\chi_n g = \sum_k c_k \chi_{n+k},$$

et par continuité de ψ

$$X_n = \sum_k c_k \pi_{n+k}.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$\ell(n) = \left(\sum_{k \in \Lambda_n} \Psi\left(\frac{(1+\varepsilon)^2 \beta}{a_k \sigma}\right) \right)^{\frac{1}{2d}},$$

avec $\Lambda_n = [-n, n]^d$. Comme $(1+\varepsilon)^2 \beta < K$, $\ell(n)$ est une suite croissante de limite $+\infty$. On pose ensuite

$$X_n^* = \sum_{|k| < \ell(|n|)} c_k \pi_{n+k},$$

et enfin

$$R_n = X_n - X_n^*.$$

On a alors

$$\|X_n^*\|_{H_1}^2 = \sum_{|k| < \ell(|n|)} c_k^2$$

ainsi que

$$\|R_n\|_{H_1}^2 = \sum_{|k| \geq \ell(|n|)} c_k^2.$$

On a donc

$$\lim_{|n| \rightarrow \infty} \|X_n^*\|_{H_1}^2 = \sigma^2$$

et

$$\lim_{|n| \rightarrow \infty} \|R_n\|_{H_1}^2 = 0.$$

On a

$$P(R_n \leq -\frac{\varepsilon\beta}{a_n}) = \Psi\left(\frac{\varepsilon\beta}{a_n \|R_n\|_{H_1}}\right)$$

Comme $\|R_n\|_{H_1}^2$ tend vers 0, on a pour $|n|$ assez grand $\frac{\varepsilon\beta}{\|R_n\|_{H_1}^2} > \frac{K}{\sigma}$: il s'ensuit que la série de terme général

$$P(R_n \leq -\frac{\varepsilon\beta}{a_n})$$

converge. D'après le lemme de Borel-Cantelli, si l'on pose

$$\Omega_1 = \{\omega \in \Omega, \exists n_0(\omega), |n| \geq n_0(\omega) \implies R_n > -\frac{\varepsilon\beta}{a_n}\},$$

on a $P(\Omega_1) = 1$.

On pose maintenant, pour $n \in \mathbb{N}$

$$A_n = \{X_n^* \geq \frac{(1+\varepsilon)\beta}{a_n}\},$$

puis

$$N_n = \sum_{k \in \Lambda_n} \mathbb{1}_{A_k},$$

et

$$N = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \mathbb{1}_{A_k}.$$

On pose aussi

$$s_n = \sum_{k \in \Lambda_n} P(A_k).$$

Admettons pour l'instant que $\lim s_n = +\infty$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour n assez grand, on a $x < s_n$. Alors

$$\begin{aligned} P(N \leq x) &\leq P(N_n \leq x) \\ &= P(s_n - N_n \geq s_n - x) \\ &= P(\mathbb{E}_P N_n - N_n \geq s_n - x) \\ &\leq P(|\mathbb{E}_P N_n - N_n| \geq s_n - x) \\ &\leq \frac{\text{Var } N_n}{(s_n - x)^2} \end{aligned}$$

On a

$$\text{Var } N_n = \sum_{k \in \Lambda_n} \sum_{l \in \Lambda_n} \text{Covar}(\mathbb{1}_{A_k}, \mathbb{1}_{A_l})$$

Mais dès que $|k - l| > \ell(|k|) + \ell(|l|)$, X_k^* et X_l^* sont indépendantes, ce qui implique $\text{Covar}(\mathbb{1}_{A_k}, \mathbb{1}_{A_l}) = 0$. On a donc

$$\text{Var } N_n = \sum_{k \in \Lambda_n} \sum_{|k-l| \leq 2\ell(n)} |\text{Covar}(\mathbb{1}_{A_k}, \mathbb{1}_{A_l})|$$

Mais

$$|\text{Covar}(\mathbb{1}_{A_k}, \mathbb{1}_{A_l})| = |P(A_k \cap A_l) - P(A_k)P(A_l)| \leq P(A_k)$$

On en déduit

$$\text{Var } N_n \leq (4\ell(n) + 1)^d \sum_{k \in \Lambda_n} P(A_k) = (4\ell(n) + 1)^d s_n.$$

On a donc

$$\forall n \geq 1 \quad P(N \leq x) \leq \frac{(4\ell(n) + 1)^d}{(s_n - x)^2} s_n$$

Admettons un instant avoir démontré que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(4\ell(n) + 1)^d}{s_n} = 0. \quad (1.15)$$

Il s'ensuit que pour tout x réel, on a $P(N \leq x) = 0$, ce qui implique

$$P(N = +\infty) = 1.$$

Cela signifie exactement que si l'on pose

$$\Omega_2 = \left\{ \omega \in \Omega, \forall n_0 \in \mathbb{N}, \exists n_1(\omega), |n_1(\omega)| \geq n_0, X_{n_1(\omega)}^* \geq \frac{(1 + \varepsilon)\beta}{a_{n_1(\omega)}} \right\},$$

on a $P(\Omega_2) = 1$. Maintenant il est facile de voir que pour $\omega \in \Omega^\beta = \Omega_1 \cap \Omega_2$, on a

$$\overline{\lim}_{|n| \rightarrow \infty} a_n X_n(\omega) \geq \beta$$

et que $P(\Omega^\beta) = 1$. Maintenant si l'on pose

$$\Omega' = \bigcap_{n \geq 1} \Omega^{K - \frac{1}{n}},$$

lorsque $K < \infty$ (et $\Omega' = \bigcap_{n > K} \Omega^n$ lorsque $K = +\infty$), on a

$$\forall \omega \in \Omega' \quad \overline{\lim}_{|n| \rightarrow \infty} a_n X_n(\omega) \geq K$$

et $P(\Omega') = 1$. Autrement dit

$$\overline{\lim}_{|n| \rightarrow \infty} a_n X_n \geq K \text{ p.s.}$$

Il faut à présent que nous démontrions (1.15) ainsi que $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = +\infty$. Il s'agit d'encadrer $P(A_k)$. On a

$$P(A_k) = \Psi\left(\frac{(1+\varepsilon)\beta}{a_k \|X_k^*\|_{H_1}}\right)$$

Pour $|k|$ suffisamment grand, on a

$$\frac{1}{1+\varepsilon}\sigma \leq \|X_k^*\|_{H_1} \leq \sigma,$$

On en déduit qu'il existe une constante L telle que pour tout n

$$s_n \geq L \sum_{k \in \Lambda_n} \Psi\left(\frac{(1+\varepsilon)^2 \beta}{a_k \sigma}\right),$$

ce qui entraîne $\lim s_n = +\infty$ car la série de terme général $\Psi\left(\frac{(1+\varepsilon)^2 \beta}{a_n \sigma}\right)$ diverge. Mais, en se reportant à la définition de $\ell(n)$, on voit alors que

$$\frac{(4\ell(n) + 1)^d}{s_n} = O\left(\frac{1}{s_n^{1/2}}\right).$$

Ainsi (1.15) est vérifié.

L'inégalité inverse est beaucoup plus simple à démontrer : soit $\beta > K$: On a

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}^d} P(a_n X_n \geq \beta) < +\infty.$$

Donc d'après le lemme de Borel-Cantelli

$$P(a_n X_n \geq \beta \text{ i. s.}) = 0,$$

ce qui implique

$$\overline{\lim}_{|n| \rightarrow \infty} a_n X_n \leq \beta \quad \text{p. s.}$$

En procédant comme précédemment par intersection dénombrable, on constate que

$$P(a_n X_n \geq K \text{ i. s.}) = 0,$$

ce qui implique

$$\overline{\lim}_{|n| \rightarrow \infty} a_n X_n \leq K \quad \text{p. s.}$$

Si $K = 0$, comme X et $-X$ ont la même loi, on a aussi

$$\overline{\lim}_{|n| \rightarrow \infty} -a_n X_n \leq 0 \quad \text{p. s.,}$$

d'où

$$\lim_{|n| \rightarrow \infty} a_n X_n = 0 \quad \text{p. s.},$$

Ce qui achève la preuve.

Le calcul de K lorsque $a_n = \frac{1}{\sqrt{\ln |n|}}$ est une conséquence facile du fait que la série $\sum_{n \in \mathbb{Z}^d} \frac{1}{|n|^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > d$.
 ■

Remarque Pour $d = 1$, Pickands a montré en [36] que pour X gaussien stationnaire centré de variance 1 et dont la covariance tend vers zéro, on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\max(X_1, \dots, X_n)}{\sqrt{2 \ln n}} \rightarrow 1 \quad \text{p.s.}$$

Ce résultat implique facilement

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{X_n}{\sqrt{2 \ln n}} \geq 1 \quad \text{p.s.}$$

Mais, comme précédemment, le lemme de Borel-Cantelli montre que

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{X_n}{\sqrt{2 \ln n}} \leq 1 \quad \text{p.s.}$$

D'après le lemme de Riemann, l'existence d'une densité spectrale entraîne que la covariance a une limite nulle. Ainsi, pour $d = 1$ et $a_n = \frac{1}{\sqrt{\ln |n|}}$, le résultat de Pickands implique celui que nous présentons ici. L'intérêt de notre théorème est de donner une formule explicite de la limite en toute dimension d et pour quelque suite a_n de limite nulle que ce soit. Cette formule est mentionnée par Lifshits dans [31] dans le cas de variables gaussiennes centrées indépendantes.

1.1.4 Un ensemble connexe de paramètres pour lesquels il y a existence et unicité

L'objet de cette sous-section est d'obtenir des informations sur la structure de l'ensemble des potentiels pour lesquels il existe une unique mesure de Gibbs associée (à l'intérieur d'une certaine classe de mesures de probabilité). Nous allons prouver que, sous des hypothèses convenables de symétrie, un potentiel J pour lequel il y a unicité peut être continûment perturbé jusqu'à ce qu'il y ait disparition de toute interaction par paire (*i.e* jusqu'à ce que $J(k) = 0$ pour tout $k \neq 0$) et de manière telle que durant cette perturbation

l'unicité de la mesure de Gibbs correspondante soit préservée.

Soit Γ le groupe engendré par les symétries orthogonales d'axes les vecteurs de base e_i , $1 \leq i \leq d$. Ce groupe est isomorphe à $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^d$. On dit qu'un potentiel J est Γ -invariant s'il vérifie

$$\forall \Theta \in \Gamma \quad J \circ \Theta = J \quad (1.16)$$

Rappelons qu'un potentiel est nécessairement pair. Ainsi, il est aisé de constater que pour $d = 1$, tout potentiel est Γ -invariant. Dans la plupart des cas, le potentiel a une symétrie naturelle qui le rend Γ -invariant. (Par exemple, si $J(n)$ dépend uniquement d'une norme ℓ^p de n .)

Soit $\alpha > 1$. On note \mathcal{S}_α l'ensemble des potentiels J qui appartiennent à A_α et sont Γ -invariant, soit

$$\mathcal{S}_\alpha = \{J \in A_\alpha, \forall \Theta \in \Gamma \quad J \circ \Theta = J\}.$$

On pose

$$\mathcal{S}_\alpha^+ = \{J \in \mathcal{S}_\alpha \quad , \quad \hat{J}(\mathbb{U}) \subset \mathbb{R}^+ \text{ et } 0 \notin \hat{J}(\mathbb{U}_\alpha)\}.$$

D'après le théorème 1.2, pour tout $\beta > 0$ et $h \in \mathbb{R}$, on a

$$\mathcal{S}_\alpha^+ = \{J \in \mathcal{S}_\alpha \quad | \quad |\mathfrak{G}_{J,h}^\beta \cap \mathcal{P}_\alpha(\Omega)| = 1\}.$$

On munit cet ensemble de la topologie induite par A_α . Nous allons démontrer le théorème suivant :

Théorème 1.4. \mathcal{S}_α^+ est un ouvert connexe de \mathcal{S}_α .

Preuve : Nous allons avoir besoin de quelques lemmes. Deux d'entre eux sont seulement énoncés, puisque leurs preuves peuvent être trouvées dans l'ouvrage de Kahane [25] (elles y sont données pour $d = 1$, mais la généralisation est facile.)

On note

$$\hat{A}_\alpha = \{\hat{x}; x \in A_\alpha\}$$

Soit $J \in \mathcal{S}_\alpha^+$. Notre méthode consiste à exhiber un élément bien choisi $B \in A_\alpha$ tel que $\exp(B) = J$ et considérer sur $[0, 1]$ l'application $\gamma : t \mapsto \exp(tB)$. Rappelons que A_α est une algèbre de Banach avec la convolution des suites comme multiplication. Ainsi $\exp(B)$ est correctement défini par la série absolument convergente :

$$\exp(B) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{B^{*k}}{k!}.$$

Lemme 5.

$$\forall B \in A_a \quad \exp(\hat{B}) = \widehat{\exp(B)} \text{ sur } \mathbb{U}_{r_a}.$$

Preuve : Soit $Q_n(X) = 1 + \frac{X}{1!} + \frac{X^2}{2!} + \dots + \frac{X^n}{n!}$. Comme $B \mapsto \hat{B}$ est un morphisme d'algèbres, on a

$$\forall B \in A_a \quad Q_n(\hat{B}) = \widehat{Q_n(B)}$$

Pour tout $z \in \mathbb{U}_{r_a}$, cela signifie $Q_n(\hat{B}(z)) = \widehat{Q_n(B)}(z)$. Par définition de \exp (dans A_a comme dans \mathbb{C}) et d'après la continuité de $B \mapsto \hat{B}(z)$, nous obtenons le résultat désiré.

■

Lemme 6. Soit $f : \mathbb{U}_\alpha \rightarrow \mathbb{C}$ telle que

1. f est continue sur \mathbb{U}_α .
2. f est holomorphe sur l'intérieur de \mathbb{U}_α .
3. L'application $g(z) = f(\alpha z)$ appartient à \hat{A}_1 .
4. $\forall z \in \mathbb{U}_\alpha, \forall (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_d) \in \{-1, +1\}^d \quad f(z_1^{\varepsilon_1}, \dots, z_d^{\varepsilon_d}) = f(z)$
5. $f(\mathbb{U}) \subset \mathbb{R}$

Alors il existe une suite $b \in \mathcal{S}_\alpha \quad f = \hat{b}$

Preuve : D'après 2., il existe une unique suite $(b_n)_{n \in \mathbb{Z}^d}$ telle que pour tout z dans l'intérieur de \mathbb{U}_α

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} b_n z^n.$$

L'unicité de ce développement implique (en utilisant l'hypothèse 4) que b est Γ -invariant et (en utilisant l'hypothèse 5), que b est à valeurs réelles. Pour tout $n \in \mathbb{Z}^d$ et $\frac{1}{\alpha} < r < \alpha$, on a

$$r^{s(n)} b_n = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, +\pi]^d} f(re^{i\theta_1}, \dots, re^{i\theta_d}) e^{-i(\theta_1 n_1 + \dots + \theta_d n_d)} d\theta_1 \dots d\theta_d, \quad (1.17)$$

où $s(n) = \sum_{1 \leq i \leq d} n_i$. Comme f est uniformément continue sur \mathbb{U}_α , on peut faire tendre r vers α et la formule (1.17) demeure vraie pour $r = \alpha$. On a trouvé le développement de g en série de Fourier . D'après 3. , on obtient

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}^d} \alpha^{s(n)} |b_n| < +\infty.$$

De plus, on a

$$|b_n|\alpha^{|n|} \leq \sum_{p \in \Gamma(n)} |b_p|\alpha^{s(p)},$$

où $\Gamma(n) = \{\Theta(n); \Theta \in \Gamma\}$. Alors

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}^d} |b_n|\alpha^{|n|} \leq 2^d \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} \alpha^{s(n)} |b_n| < +\infty.$$

Nous avons prouvé que $b \in \mathcal{S}_\alpha$ et $f = \hat{b}$.

■

Lemme 7. *Soit f une application définie sur \mathbb{U} et telle que, pour tout $z \in \mathbb{U}$, il existe un voisinage W de z et $g \in \hat{A}_1$ vérifiant $f = g$ sur W .*

Alors $f \in \hat{A}_1$.

Preuve : Voir [25]. Notons que la première preuve de ce résultat a été donné par Wiener.

■

Lemme 8. *Pour tous $f \in \hat{A}_1$, $\varepsilon > 0$ et $z \in \mathbb{U}$ il existe un voisinage W de z et $b \in A_1$ tels que $\|b\|_{A_1} < \varepsilon$ et $\hat{b} = f$ sur W .*

Preuve : Voir l'ouvrage de Kahane[25].

■

Lemme 9. *Soit f une application continue sur \mathbb{U} et $g \in \hat{A}_1$ telle que $\exp(f) = g$.*

Alors $f \in \hat{A}_1$.

Preuve : Soit $z_0 \in \mathbb{U}$. Soit $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $z \in B(z_0, \varepsilon)$

$$|g(z) - g(z_0)| < |g(z_0)|/2.$$

Soit \ln une détermination du logarithme dans $B(g(z_0), \frac{|g(z_0)|}{2})$ telle que $\ln(g(z_0)) = f(z_0)$. Comme f est continue, on a pour tout $z \in B(z_0, \varepsilon)$, $f(z) = \ln(g(z))$. D'après le lemme 8, il existe $\delta < \varepsilon$ et $b \in A_1$ avec

$$\|b - g(z_0)e\|_{A_1} < \frac{|g(z_0)|}{2}$$

et $g = \hat{b}$ sur $B(z_0, \delta)$. Il existe une suite $(l_n)_{n \geq 0}$ telle que

$$\ln z = \sum_{n \geq 0} l_n (z - g(z_0))^n \text{ pour } z \in B(g(z_0), \frac{|g(z_0)|}{2}).$$

Alors , pour tout $z \in B(z_0, \delta)$

$$f(z) = \ln(g(z)) = \ln(\hat{b}(z)) = \sum_{n \geq 0} l_n (\hat{b}(z) - g(z_0))^n$$

Comme le rayon de convergence de la série entière $\sum l_n x^n$ est strictement plus grand que $\|b - g(z_0)e\|_{A_1}$, on peut définir

$$l = \sum_{n \geq 0} l_n (b - g(z_0)e)^n.$$

On a $f(z) = \hat{l}(z)$ pour $z \in B(z_0, \delta)$. Alors, d'après le lemme 7, $f \in \hat{A}_1$.

■

Expliquons à présent les différentes étapes de la preuve du théorème. Le lemme 5 nous permet de manier des fonctions plutôt que des suites. Ainsi, une fois que l'on aura trouvé un logarithme de \hat{J} , on pourra utiliser le lemme 6 pour vérifier que celui-ci est bien dans le bon espace. Cependant, comme \mathbb{U}_α n'est pas simplement connexe, nous devons utiliser une astuce pour définir un logarithme de \hat{J} . En fait, nous allons décomposer \hat{J} pour remplacer \mathbb{U}_α par un ensemble convexe.

On note E_α l'image de la couronne $\{z \in \mathbb{C}, \frac{1}{\alpha} \leq |z| \leq \alpha\}$ par l'application $z \mapsto z + \frac{1}{z}$. Un calcul simple montre que E_α est une ellipse remplie :

$$E_\alpha = \left\{ z = x + iy; \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{x^2}{(\alpha + \frac{1}{\alpha})^2} + \frac{y^2}{(\alpha - \frac{1}{\alpha})^2} \leq 1 \right\}.$$

Comme J est Γ -invariant, on peut définir une application ϕ sur $(E_\alpha)^d$ par

$$\phi\left(z_1 + \frac{1}{z_1}, \dots, z_d + \frac{1}{z_d}\right) = \hat{J}(z).$$

Comme \mathbb{U}_α est compact, en utilisant le critère séquentiel de continuité, on voit que ϕ est continue. D'après le théorème 2, \hat{J} ne s'annule pas et donc ϕ non plus. Comme E_α^d est convexe, il existe une application continue $\Phi : E_\alpha^d \rightarrow \mathbb{C}$ telle que $\phi = \exp(\Phi)$. (pour une version générale du théorème de relèvement, voir par exemple [9], ex. 3.8.). On définit Ψ sur \mathbb{U}_α par

$$\Psi(z) = \Phi\left(z_1 + \frac{1}{z_1}, \dots, z_d + \frac{1}{z_d}\right). \quad (1.18)$$

Ainsi, on a $\hat{J} = \exp(\Psi)$. D'après le théorème 1.2, $\hat{J}(1, \dots, 1) \in \mathbb{R}_*^+$. Quitte à ajouter une constante à Ψ , on peut supposer que $\Psi(1, \dots, 1) \in \mathbb{R}$. Comme $\hat{J}(\mathbb{U}) \subset \mathbb{R}^+$, on a $\Psi(\mathbb{U}) \subset \mathbb{R} + 2i\pi\mathbb{Z}$. Mais \mathbb{U} est connexe et Ψ est continue,

donc $\Psi(\mathbb{U}) \subset \mathbb{R}$.

Comme Ψ est localement un logarithme de \hat{J} , Ψ est holomorphe dans l'intérieur de \mathbb{U}_α .

Le lemme 9 implique que $z \mapsto \Psi(\alpha z)$ appartient à \hat{A}_1 .

(1.18) implique que Ψ vérifie la condition 4. du lemme 6. Alors, on peut appliquer le lemme 6 et l'on obtient $B \in \mathcal{S}_\alpha$ tel que $\Psi = \hat{B}$.

Maintenant, on pose, pour $t \in [0, 1]$, $\gamma(t) = \exp(tB)$. γ est continu, avec $\gamma(0) = e$.

D'après le lemme 5

$$\widehat{\gamma(1)} = \widehat{\exp(B)} = \exp(\hat{B}) = \exp(\Psi) = \hat{J}.$$

Comme A_α est semi-simple, ceci implique $\gamma(1) = J$. Il reste à prouver que $\gamma([0, 1]) \subset \mathcal{S}_\alpha^+$. Pour $t \in [0, 1]$, comme \mathcal{S}_α est une sous-algèbre fermée de A_α , on a $\exp(tB) \in \mathcal{S}_\alpha$. De plus $\exp(tB)$ est toujours inversible, et $\widehat{\exp(tB)}(\mathbb{U}) = \exp(t\Psi(\mathbb{U})) \subset \mathbb{R}^+$, puisque $\Psi(\mathbb{U}) \subset \mathbb{R}$. Alors, d'après le théorème 1.2, il s'ensuit que $\gamma(t) \in \mathcal{S}_\alpha^+$.

Comme chaque point peut être relié à e , on a montré que \mathcal{S}_α^+ est connexe par arcs.

Il est facile de voir que $J \mapsto m(J) = \inf\{\hat{J}(z); z \in \mathbb{U}\}$ est continue.

Ainsi $\mathcal{S}_\alpha^+ = \mathcal{S}_\alpha \cap (G(A_\alpha) \cap m^{-1}([0, +\infty[))$ est un ouvert de \mathcal{S}_α .

■

Remarque En utilisant la proposition 1.2, il serait facile de prouver qu'à cet arc $t \mapsto \gamma(t)$ tracé dans \mathcal{S}_α^+ , correspond un flot continu à valeurs dans $\mathfrak{G}_{J,h}^\beta \cap \mathcal{P}_\alpha(\Omega)$.

■

1.1.5 Transition de phase pour $d = 1$

Pour de nombreuses interactions quadratiques en dimension $d = 1$, nous allons montrer que nous pouvons obtenir des résultats très précis sur la transition de phase, à savoir que nous pouvons déterminer la taille de l'ensemble des mesures de Gibbs vérifiant les conditions de support que nous nous sommes imposées. Dans un contexte discret, il peut être intéressant de dénombrer les phases pures : on sait par exemple que le modèle d'Ising en dimension $d = 2$ possède exactement 2 phases pures. Ici, un tel dénombrement n'est pas pertinent : les phases pures étant en bijection avec l'espace affine M_h^J , l'ensemble des phases pures est vide ou a la puissance du continu. Il est tout à fait exceptionnel de pouvoir obtenir un résultat aussi précis : dans la plupart des cas, on est juste capable d'exhiber deux phases distinctes.

Dans toute cette section 1.1.5, on a $d = 1$.

Théorème 1.5. *Soit J une interaction non dégénérée sur \mathbb{Z} i.e. $\exists k \neq 0$ $J(k) \neq 0$. On suppose que $J \in A_\alpha$, pour $\alpha > 1$. Si de plus, \hat{J} ne s'annule pas sur le cercle $|z| = \alpha$, ou, ce qui est équivalent, sur le cercle $|z| = \frac{1}{\alpha}$, alors $M_0^J \cap B_\alpha$ est un espace vectoriel de dimension finie, dont la dimension est exactement le nombre de racines de \hat{J} dans Ω_α comptées avec leur ordre de multiplicité.*

On aura besoin du lemme suivant :

Lemme 10. *On suppose ici que $d = 1$ et que $u \in A_\alpha$. Alors, si z est un point intérieur à \mathbb{U}_α (i.e. tel que $\frac{1}{\alpha} < |z| < \alpha$) vérifiant $\hat{u}(z) = 0$, il existe $y \in A_\alpha$ tel que $u = (\delta_{e_1} - z\delta_0) * y$.*

Preuve : Définissons la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ par

$$x_n = \frac{1}{z^n} \sum_{k=-\infty}^n u_k z^k$$

L'hypothèse $\hat{u}(z) = 0$ permet d'avoir également la représentation

$$x_n = -\frac{1}{z^n} \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k z^k$$

Nous voulons montrer $x \in A_\alpha$. Nous allons montrer $\sum_{k \leq 0} |x_k| \alpha^{-k} < +\infty$ en utilisant la première représentation et $|z| > \frac{1}{\alpha}$. On montrerait de même $\sum_{k \geq 0} |x_k| \alpha^k < +\infty$ en utilisant la première représentation et $|z| < \alpha$. Montrons que la suite $S_n = \sum_{k=0}^n |x_{-k}| \alpha^k$ est bornée. On va à cet effet employer une transformation d'Abel : on a

$$|x_{-k}| \alpha^k = x_{-k} z^{-k} \quad \varepsilon_{-k} (\alpha z)^k$$

où ε_k vaut $+1$ si $x_k > 0$ et -1 sinon. On pose alors

$$T_n = \sum_{k=0}^n \varepsilon_{-k} (\alpha z)^k \quad \text{et} \quad T_{-1} = 0$$

On a donc

$$S_n = \sum_{k=0}^n x_{-k} z^{-k} (T_k - T_{k-1}) = x_{-n} z^{-n} T_n - \sum_{k=0}^{n-1} [x_{-k} z^{-k} - x_{-(k+1)} z^{-(k+1)}] T_k$$

Utilisant la définition de $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, on obtient

$$S_n = T_n \sum_{k=-\infty}^{-n} u_k z^k - \sum_{k=0}^{n-1} u_{-k} z^{-k} T_k$$

On vérifie facilement que

$$\forall n \geq 0 \quad |T_n| \leq \frac{\alpha|z|}{\alpha|z| - 1} (\alpha|z|)^n$$

On en déduit

$$S_n \leq \frac{\alpha|z|}{\alpha|z| - 1} \left[\sum_{k=-\infty}^{-n} \alpha^n |z|^{n+k} + \sum_{k=0}^{n-1} |u_{-k}| \alpha^k \right]$$

Comme $|z| > \frac{1}{\alpha}$, $n + k \leq 0$ implique $|z|^{n+k} \leq \alpha^{-(n+k)}$, on a finalement

$$\forall n \geq 0 \quad S_n \leq \frac{\alpha|z|}{\alpha|z| - 1} \sum_{k=-\infty}^0 |u_k| \alpha^{-k}$$

On a donc $x \in A_\alpha$. On pose alors $y = -\frac{1}{z}x$ et l'on vérifie aisément que y convient.

■

Preuve : du théorème : L'équivalence entre l'absence de zéros sur $|z| = \alpha$ et sur $|z| = \frac{1}{\alpha}$ provient de l'identité $\hat{J}(z) = \hat{J}(\frac{1}{z})$.

Comme \hat{J} est holomorphe sur l'intérieur de Ω_α , le théorème des zéros isolés implique alors que \hat{J} ne peut posséder qu'un nombre fini de zéros, nécessairement d'ordres finis. Notons-les z_i , de multiplicité m_i .

En appliquant plusieurs fois le lemme précédent, on trouve $Y \in A_\alpha$, tel que

$$J = \prod_i (\delta_{e_1} - z_i \delta_0)^{*m_i} * Y$$

Comme $\widehat{u * v} = \hat{u} \hat{v}$, on voit que \hat{Y} ne s'annule pas sur Ω_α , et donc d'après le lemme 4, que Y est inversible. Donc $J * u = 0$ est équivalent à

$$\prod_i (\delta_{e_1} - z_i \delta_0)^{*m_i} * u = 0$$

Les solutions complexes de cette équation de récurrence linéaire sont bien connues : c'est un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension $\sum m_i$ (voir par exemple [3]). Elles s'écrivent $u_n = \sum_i P_i(n) z_i^n$ où P_i est un polynôme à coefficients

complexes de degré strictement inférieur à m_i .

Cependant nous cherchons les solutions réelles : comme J est à valeurs réelles, si z est racine d'ordre m de \hat{J} , alors \bar{z} aussi. On en déduit que les suites cherchées sont de la forme

$$u_n = \sum_{z_i \in \mathbb{R}} P_i(n) z_i^n + \sum_{\text{Im}(z_i) > 0} |z_i|^n [\cos(n \arg(z_i)) Q_i(n) + \sin(n \arg(z_i)) R_i(n)]$$

où P_i, Q_i, R_i sont des polynômes à coefficients réels de degré strictement inférieur à m_i .

Elles forment un espace vectoriel réel de dimension $\sum_i m_i$.

■

1.2 Un modèle exactement résoluble

Dans toute cette section, $d = 1$. On étudie ici avec plus de détails un cas particulier des mesures de Gibbs introduites dans la section 1.1, *i.e.* les mesures de Gibbs sur $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ associées au potentiel défini par

$$\Phi_{\Lambda}(\omega) = \begin{cases} \beta(\frac{K}{2}\omega_i^2 + h\omega_i) & \text{si } \Lambda = \{i\} \\ \varepsilon\beta c^{|i-j|}\omega_i\omega_j & \text{if } \Lambda = \{i, j\}, i \neq j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.19)$$

où $\beta, K > 0, h \in \mathbb{R}, \varepsilon \in \{+1, -1\}$ et $0 < |c| < 1$.

Suivant la définition donnée en 1.1, les coefficients d'interaction J sont alors définis par

$$\begin{cases} J(0) = K \\ J(k) = \varepsilon c^{|k|} \quad \text{pour } k \in \mathbb{Z}^* \end{cases}$$

Pour ce potentiel, on va noter $\mathfrak{G}(\beta, K, \varepsilon, c, h)$ l'ensemble $\mathfrak{G}_{J,h}^{\beta}$. Dans cette section, on va tracer le diagramme de phase, *i.e.* on va déterminer pour quelles valeurs des paramètres $\beta, K, \varepsilon, c, h$ on a existence d'une mesure de Gibbs ou transition de phase.

1.2.1 Existence d'une mesure de Gibbs

Valeurs pour lesquelles \hat{J} est positive D'après la proposition 1.1, une condition nécessaire à l'existence d'une mesure de Gibbs est la positivité de \hat{J} . Calculons donc \hat{J} .

$$\hat{J}(z) = K + \varepsilon \sum_{k \in \mathbb{Z}^*} c^{|k|} z^k = K + \varepsilon c \left(\frac{z}{1 - cz} + \frac{z^{-1}}{1 - cz^{-1}} \right)$$

Ou encore

$$\hat{J}(e^{i\theta}) = K + 2\varepsilon c \frac{\cos \theta - c}{-2c \cos \theta + 1 + c^2}.$$

Une condition nécessaire et suffisante pour avoir $\hat{J} \geq 0$ est donc

$$K \geq K_c^\varepsilon = \sup_{\theta \in [0, 2\pi]} -2\varepsilon c \frac{\cos \theta - c}{-2c \cos \theta + 1 + c^2}$$

Comme $t \mapsto \frac{t-c}{-2ct+1+c^2}$ est croissante ($1 - c^2 > 0$), on a

$$\frac{1}{1-c} \geq \frac{\cos \theta - c}{-2c \cos \theta + 1 + c^2} \geq -\frac{1}{1+c};$$

la première (resp. la seconde) inégalité est une égalité si et seulement si $\theta = 0$ (resp. $\theta = \pi$).

En distinguant les cas suivant les signes de ε et c , on obtient finalement

$$K_c^\varepsilon = \frac{2|c|}{1 + \varepsilon|c|}.$$

Intégrabilité de \hat{J}^{-1} Une autre condition nécessaire à l'existence d'une mesure de Gibbs énoncée lors de la proposition 1.1 est l'intégrabilité de \hat{J}^{-1} par rapport à la mesure de Haar (condition 2).

Si $K > K_c^\varepsilon$, on a pour tout $z \in \mathbb{U}$ $\hat{J}(z) > 0$, et alors $z \mapsto \hat{J}(z)^{-1}$ est une fonction continue, donc intégrable.

Si $K = K_c^\varepsilon$, \hat{J}^{-1} n'est pas intégrable : nous allons le montrer pour $\varepsilon = +1$ et $\alpha > 0$, les autres cas se traitant de manière analogue.

Ici, on a

$$\hat{J}(e^{i\theta}) = 2c \left(\frac{1}{1+c} + \frac{\cos \theta - c}{-2c \cos \theta + 1 + c^2} \right)$$

D'où

$$\hat{J}(e^{i\theta})^{-1} = \frac{1}{(1-c)2c} \frac{1+c^2-2c \cos \theta}{1+\cos \theta}$$

et

$$\int_{\mathbb{U}} \hat{J}(z)^{-1} dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{(1-c)4\pi c} \frac{1+c^2-2c \cos \theta}{1+\cos \theta} d\theta = +\infty$$

puisque $\frac{1+c^2-2c \cos \theta}{1+\cos \theta} \sim_{\pi} \frac{2(1+c)^2}{(\theta-\pi)^2}$.

Domaine d'existence d'une mesure de Gibbs

Théorème 1.6. *Soit J le potentiel quadratique de type géométrique défini par (1.19). Il existe une mesure de Gibbs associée (appartenant à $\mathfrak{G}(\beta, K, \varepsilon, c, h)$) si et seulement si le potentiel propre est suffisamment grand, plus précisément*

$$K > K_c^\varepsilon = \frac{2|c|}{1 + \varepsilon|c|}.$$

Preuve : Les deux premières conditions de la proposition 1.1 sont vérifiées si et seulement si $K > K_c^\varepsilon$. Dans ce cas, la condition 3 de la proposition 1.1 est automatiquement vraie, puisque l'on obtient $\hat{J}(1) > 0$ et l'on peut exhiber la suite constante égale à $\frac{h}{\hat{J}(1)}$ comme élément de M_h^J .
■

1.2.2 Diagramme de phases

Quand les hypothèses d'existence sont vérifiées, il y a transition de phase si et seulement si l'ensemble M_h^J contient plus d'un point, ou, par linéarité, si et seulement si $M_0^J \neq \{0\}$. Nous allons donc décrire M_0^J .

Lemme 11. *Tout élément $(u_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ de M_0^J vérifie la relation de récurrence :*

$$(K - \varepsilon)u_{n+1} + \left(-K\left(c + \frac{1}{c}\right) + \varepsilon 2c\right)u_n + (K - \varepsilon)u_{n-1} = 0$$

Preuve : Par définition de M_0^J , on a, éventuellement après réindexation

$$\begin{cases} J(0)u_n + \sum_{i=1}^{+\infty} J(i)u_{n+i} + \sum_{i=1}^{+\infty} J(i)u_{n-i} = 0 \\ J(0)u_{n+1} + \sum_{i=2}^{+\infty} J(i-1)u_{n+i} + \sum_{i=0}^{+\infty} J(i+1)u_{n-i} = 0 \\ J(0)u_{n-1} + \sum_{i=0}^{+\infty} J(i+1)u_{n+i} + \sum_{i=2}^{+\infty} J(i-1)u_{n-i} = 0 \end{cases}$$

On multiplie ces trois lignes respectivement par $c + \frac{1}{c}$, -1 , -1 et on fait la somme. Comme

$$\forall i \geq 2, \left(c + \frac{1}{c}\right)J(i) - J(i+1) - J(i-1) = 0$$

on a

$$\begin{aligned} J(0)\left[\left(c + \frac{1}{c}\right)u_n - u_{n+1} - u_{n-1}\right] + (u_{n+1} + u_{n-1})J(1)\left(c + \frac{1}{c}\right) \\ - [J(1)u_n + J(2)u_{n-1}] - [J(1)u_n + J(2)u_{n+1}] = 0 \end{aligned}$$

En calculant $J(0)$, $J(1)$, $J(2)$, on obtient le résultat désiré.
■

Lemme 12. Soit $S \in \mathbb{R}$ vérifiant $|S| > 2$. Soit c le paramètre exponentiel défini en (1.19). On pose

$$E_c = \{u = (u_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}} : \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c^{|n|} u_n| < +\infty\}$$

$$R_S = \{u = (u_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}} : \forall n \in \mathbb{Z}, u_{n+1} - Su_n + u_{n-1} = 0\}$$

1. Il y a équivalence entre

(a) $E_c \cap R_S \neq \{0\}$

(b) $v \in E_c \cap R_S$ où $v_n = \gamma^n$ et γ est une racine (réelle) de l'équation

$$x^2 - Sx + 1 = 0$$

(c) $R_S \subset E_c$

(d) $|S| < |c + \frac{1}{c}|$

2. Lorsque ces hypothèses sont vérifiées, on a

$$\forall u \in R_S, \forall k \in \mathbb{Z}, \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} c^{|n|} u_{k+n} = \frac{S - 2c}{-S + c + c^{-1}} u_k$$

Preuve :

(a) \Rightarrow (b) Toute suite non identiquement nulle de $E_c \cap R_S$ s'écrit

$$u_n = A\gamma^n + B\gamma^{-n},$$

où $(A, B) \neq (0, 0)$.

Si $A = 0$ ou $B = 0$, le résultat est immédiat. Sinon, en supposant par exemple $\gamma > 1$, on a $u_n \sim_{+\infty} A\gamma^n$ et $u_n \sim_{-\infty} B\gamma^{-n}$.

Le résultat s'en déduit par le théorème sur les équivalents de séries absolument convergentes.

(b) \Rightarrow (c) Immédiat, car toute suite de R_S s'écrit $u_n = A\gamma^n + B\gamma^{-n}$.

(c) \Rightarrow (a) Immédiat, car $R_S \neq \{0\}$.

(b) \Rightarrow (d) (b) implique $\sum_{n \geq 1} [|\gamma|^n + |\gamma|^{-n}] |c|^n < +\infty$

$$\Leftrightarrow \sum_{n \geq 1} |\gamma c|^n + \sum_{n \geq 1} \left| \frac{c}{\gamma} \right|^n < +\infty.$$

Donc (b) $\Leftrightarrow |c| < |\gamma| < \frac{1}{|c|}$. Une étude rapide de la fonction $x \mapsto x + \frac{1}{x}$ permet de voir que $|c| < |\gamma| < \frac{1}{|c|}$ est équivalent à $|\gamma + \gamma^{-1}| < |c + c^{-1}|$.

But $\gamma + \gamma^{-1} = S$, donc (b) $\Leftrightarrow |S| < |c + \frac{1}{c}|$

Pour montrer la deuxième partie du lemme, il suffit, par linéarité, de la montrer pour $v_n = \gamma^n$, où γ est une racine de $x^2 - Sx + 1 = 0$.

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 1} c^n [\gamma^{k+n} + \gamma^{k-n}] &= \gamma^k \sum_{n \geq 1} (c\gamma)^n + \left(\frac{c}{\gamma}\right)^n \\ &= \gamma^k \left[\frac{c\gamma}{1 - c\gamma} + \frac{c/\gamma}{1 - c/\gamma} \right] \\ &= \gamma^k \left[\frac{S - 2c}{-S + c + c^{-1}} \right] \end{aligned}$$

(On utilise bien sûr que $\gamma + \gamma^{-1} = S$.)

■

Revenons maintenant au problème initial de transition de phase. Soit $K > K_c^\varepsilon$.

On applique les résultats du lemme 11 : lorsque $K = 1$ et $\varepsilon = 1$, on a $M_0^J = \{0\}$.

Sinon, $K - \varepsilon \neq 0$. Alors, on pose

$$S = \frac{K(c + \frac{1}{c}) - \varepsilon 2c}{K - \varepsilon}$$

Admettons pour l'instant que $|S| > 2$.

On a alors $M_0^J \subset R_S$, où $M_0^J = M_0^J \cap E_c \subset R_S \cap E_c$.

D'après la première partie du lemme 12, on a $M_0^J \neq \{0\} \Rightarrow |S| < |c + \frac{1}{c}|$.

Réciproquement, si $|S| < |c + \frac{1}{c}|$, comme

$$S = \frac{K(c + \frac{1}{c}) - \varepsilon 2c}{K - \varepsilon} \Leftrightarrow K = -\varepsilon \frac{S - 2c}{-S + c + c^{-1}},$$

la seconde partie du lemme 7 implique

$$|S| < |c + \frac{1}{c}| \Rightarrow R_S \subset M_0^J.$$

Ce qui implique $M_0^J \neq \{0\}$.

Il s'agit donc de déterminer quand on a $|S| < |c + \frac{1}{c}|$ et de vérifier que $K > K_c^\varepsilon$ implique $|S| > 2$. À cet effet, étudions l'application $f(K)$

$$K \mapsto \frac{K(c + \frac{1}{c}) - \varepsilon 2c}{K - \varepsilon}$$

C'est une fraction rationnelle de discriminant $-\varepsilon(1 - c^2)$. On distingue quatre cas.

1. $\varepsilon = +1$ $c > 0$

$$\begin{array}{c|ccccccc} K & 0 & K_c^\varepsilon = \frac{2c}{1+c} & \frac{3c^2+1}{2(1+c^2)} & & 1 & +\infty \\ \hline f & 2c \searrow & -2 \searrow & -(c + \frac{1}{c}) \searrow & & -\infty \parallel & +\infty \searrow \\ & & & & & & c + \frac{1}{c} \end{array}$$

2. $\varepsilon = +1$ $c < 0$

$$\begin{array}{c|ccccccc} K & 0 & K_c^\varepsilon = \frac{-2c}{1-c} & \frac{3c^2+1}{2(1+c^2)} & & 1 & +\infty \\ \hline f & 2c \nearrow & 2 \nearrow & -(c + \frac{1}{c}) \nearrow & & +\infty \parallel & -\infty \nearrow \\ & & & & & & c + \frac{1}{c} \end{array}$$

3. $\varepsilon = -1$ $c > 0$

$$\begin{array}{c|ccc} K & 0 & K_c^\varepsilon = \frac{2c}{1-c} & +\infty \\ \hline f & 2c \nearrow & 2 \nearrow & (c + \frac{1}{c}) \end{array}$$

4. $\varepsilon = -1$ $c < 0$

$$\begin{array}{c|ccc} K & 0 & K_c^\varepsilon = \frac{-2c}{1+c} & +\infty \\ \hline f & 2c \searrow & -2 \searrow & (c + \frac{1}{c}) \end{array}$$

Il est alors clair que pour $K > K_c^\varepsilon$, $|S| > 2$.

Pour $\varepsilon = -1$, on a $|S| < |c + \frac{1}{c}|$ pour tout $K > K_c^\varepsilon$.

Pour $\varepsilon = +1$, on a $|S| < |c + \frac{1}{c}|$ si et seulement si $K < \frac{3c^2+1}{2(1+c^2)}$.

On peut donc énoncer

- Théorème 1.7.** 1. Pour $\varepsilon = -1$, l'ensemble $\mathfrak{G}(\beta, K, \varepsilon, c, h)$ est non vide si et seulement si $K > K_{c,-1} = \frac{2|c|}{1-|c|}$. Alors, il y a transition de phase et l'ensemble des mesures de Gibbs extrémales est en bijection avec M_0^J , espace vectoriel de dimension 2.
2. Pour $\varepsilon = +1$, l'ensemble $\mathfrak{G}(\beta, K, \varepsilon, c, h)$ est non vide si et seulement si $K > K_c^1 = \frac{2|c|}{1+|c|}$. Alors, soit $K \geq \frac{3c^2+1}{2(1+c^2)}$, auquel cas il y a une seule mesure de Gibbs, sinon il y a transition de phase et M_0^J est un espace vectoriel de dimension 2.

Remarque Nous avons annoncé que cet exemple mettait en évidence que les classes de potentiels considérées en section 1.1 étaient suffisamment grandes pour que dans certains cas, on ne perde pas de mesure de Gibbs. Éclairons ce point. Pour $\alpha < \frac{1}{c}$, on a $J \in A_\alpha$, donc le théorème 1.5 donne une description de $M_0^J \cap B_\alpha$. Or, d'après le lemme 12, tout élément de M_0^J appartient à B_γ , où γ est la plus grande racine de $x^2 - Sx + 1 = 0$. Mais, d'après le lemme 12 $|S| < c + \frac{1}{c}$, donc $|\gamma| < \frac{1}{c}$. Ainsi, on a

$$M_0^J = \cup_{\alpha < \frac{1}{c}} (M_0^J \cap B_\alpha).$$

Cet exemple montre que, parfois, le fait de se restreindre à l'étude de sous-ensembles $M_0^J \cap B_\alpha$ n'est en rien une contrainte.

Dans cet exemple précis, on peut remarquer que non seulement le diagramme de phase ne dépend pas de β – ce qui est général, nous l'avons déjà mentionné dans les remarques suivant la proposition 1.2 – , mais en plus il ne dépend pas non plus de h .

■

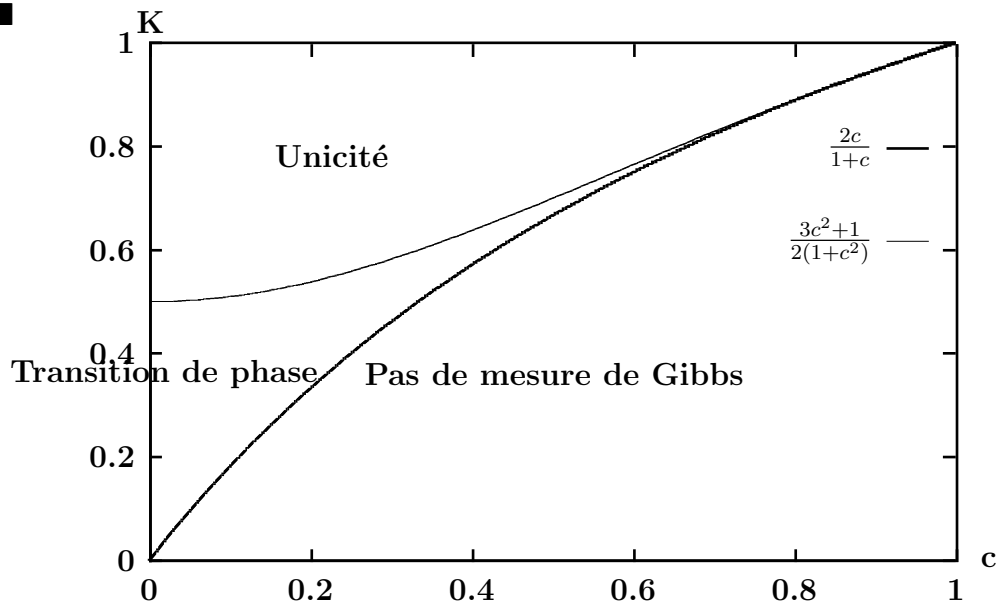


Diagramme de phase pour $\varepsilon = 1$ et $c \in]0, 1[$.

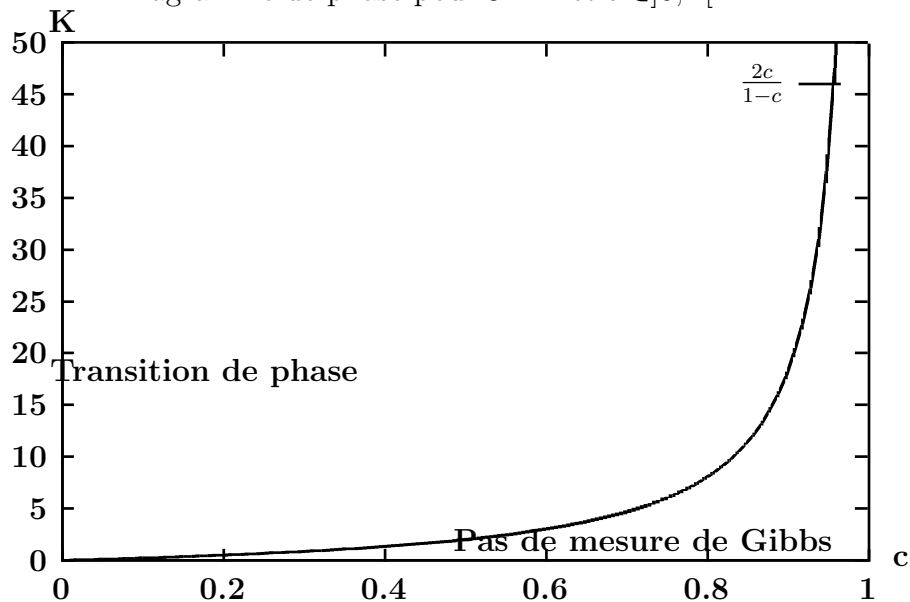


Diagramme de phase pour $\varepsilon = -1$ et $c \in]0, 1[$.

1.3 Remarques conclusives sur l'instabilité de l'unicité d'une mesure de Gibbs

L'instabilité de l'unicité de phase lorsque l'on soumet le potentiel à de petites perturbations est une des difficultés de l'étude de potentiels non bornés ou à portée infinie. Donnons-en un exemple simple dans le cadre de notre étude.

L'étude approfondie menée en section 1.2 nous a permis d'exhiber des cas non-triviaux d'unicité de phase à portée infinie. La décroissance des coefficients étant exponentielle, on pourrait s'attendre à ce que le potentiel tronqué à une portée suffisamment grande possédât la même propriété d'unicité. Or, il n'en est rien, ce que l'on peut voir par exemple en appliquant le théorème 1.2 : si l'on note J^R le potentiel tronqué à l'ordre R , $z^R \widehat{J^R}$ est un polynôme non constant, donc $\widehat{J^R}$ possède une racine qui appartient à la couronne critique \mathbb{U}_{r_a} pour r_a assez grand, puisque J étant de portée finie, il est dans tous les A_a . Le problème vient de ce que les racines de $\widehat{J^R}$ partent à l'infini lorsque R tend vers l'infini et ne restent pas dans la couronne \mathbb{U}_{r_a} .

Comment expliquer et résoudre ce phénomène irritant ? Une première solution drastique consiste à éliminer de l'ensemble des mesures de Gibbs une classe de mesures réputée ne pas avoir de sens physique. C'est l'idée sous-jacente aux corollaires 1.3 et 1.5 ; dans cette acception plus restrictive du terme de mesures de Gibbs, on retrouve la stabilité de l'unicité de phase.

Une explication mathématique de ce phénomène de discontinuité est que l'ensemble

$$\{(u_n)_{n \in \mathbb{Z}^d} : \forall k \in \mathbb{Z}^d \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} |J(n)u_{k+n}| < +\infty\}$$

dans lequel nous cherchons *a priori* les fonctions harmoniques n'est pas un espace normé : cela rend sa topologie plus compliquée à décrire.

Néanmoins, nous voulons énoncer un résultat qui montre la stabilité de l'unicité dans un sens plus faible que le sens général.

Théorème 1.8. *Soit $J \in A_a$ tel que $M_0^J \cap B_a = \{0\}$.*

Alors, il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$\forall K \in A_a, \|J - K\|_{A_a} < \varepsilon \implies M_0^K \cap B_a = \{0\}.$$

Preuve : C'est une conséquence simple du théorème 1.1 et du fait que $G(A_a)$ est ouvert.

■

Ainsi, nous avons proposé certaines restrictions sur le support des mesures de Gibbs qui permettent de préserver la propriété de stabilité du caractère d'unicité. Le terme de restriction est d'ailleurs un peu exagéré : même si les conditions D.L.R. ont pu être définies sans imposer de condition de support ni de moment aux mesures cherchées et même si Dobrushin et Künsch ont pu établir une description abstraite générale des solutions, il n'en reste pas moins nécessaire d'émettre des restrictions sur les mesures considérées : cela permet, d'une part au mathématicien de ne pas manier des objets trop pathologiques, mais surtout au physicien de considérer uniquement des objets susceptibles de modéliser le monde réel.¹

¹Même si cette notion est un sujet de controverse au sein de la communauté physicienne...

Chapitre 2

Influence de la transition de phase sur la covariance et le théorème de limite centrale

Nous avons jusqu'ici établi des liens étroits entre l'existence de zéros de \hat{J} et l'existence de transition de phase au sein d'une certaine classe de mesures, ainsi que des résultats plus précis pour $d = 1$. Revenant au cas général où d est quelconque, il nous paraît alors intéressant de considérer l'influence de l'annulation de \hat{J} sur les propriétés de dépendance entre les coordonnées des dites mesures. De manière concrète, nous allons étudier l'influence des paramètres du système sur la covariance commune aux mesures extrémales de $\mathfrak{G}_{J,h}^\beta$ des mesures de Gibbs de paramètres J, h, β , qui vaut

$$E_\mu X_i X_j = c_{i-j} = \int_{\mathbb{U}} \frac{1}{\hat{J}(z)} z^{i-j} dz.$$

Le lemme de Riemann-Lebesgue implique $\lim_{|n| \rightarrow \infty} c_n = 0$, ce qui déjà suffit pour affirmer que la mesure de Gibbs stationnaire gaussienne centrée est mélangeante. Nous voulons cependant davantage de précision.

Nous allons d'abord étudier le cas le plus simple où \hat{J} ne s'annule pas – sur \mathbb{U} , voire mieux –, ce qui correspond à l'unicité de la mesure de Gibbs au sein d'une certaine classe de mesures. Dans ce cas là, nous allons voir que, dans un sens qui reste à préciser, la décroissance de la covariance est liée directement à la décroissance de l'interaction. Par exemple, si J décroît exponentiellement, il en sera de même pour la covariance.

Le cas où \hat{J} s'annule sur \mathbb{U} est nettement plus complexe. Il correspond à la présence d'une transition de phase. On verra que sous des hypothèses relativement faibles, la covariance x_n ne peut décroître plus vite qu'en $\frac{1}{|n|^{\frac{d+1}{2}}}$, ce qui, nous le verrons, est une décroissance assez lente pour que le coefficient de renormalisation dans le théorème de limite centrale diffère de celui du cas indépendant. A cet effet, nous allons commencer par démontrer un théorème général d'analyse harmonique, qui trouvera une application directe dans le contrôle de la covariance, ainsi qu'une application à la théorie des marches aléatoires sur \mathbb{Z}^3 .

2.1 En l'absence de transition de phase

2.1.1 Décroissance de la covariance

Théorème 2.1. *Soit J un potentiel appartenant à A_a (défini en (1.5)), où a est une suite de type \mathcal{E} tel que \hat{J} ne s'annule pas sur \mathbb{U}_{r_a} . Alors, si μ est l'unique mesure gaussienne centrée élément de $\mathfrak{G}_{J,0}^\beta$, alors sa covariance $c = (c_n)_{n \in \mathbb{Z}^d} = (E_\mu X_i X_j)_{n=i-j}$ satisfait*

$$c \in A_a.$$

Preuve : Comme \hat{J} ne s'annule pas sur \mathbb{U}_{r_a} , d'après le théorème 1.1, J est inversible dans A_a . Mais, comme $J \mapsto \hat{J}$ est un morphisme d'algèbres, on a $\widehat{J^{-1}} = \hat{J}^{-1}$, et donc d'après la définition de c , on a $c = J^{-1}$, donc $c \in A_a$. ■

Remarque : ce résultat se décline suivant les différents choix possibles pour a : exponentielle, puissance,... En particulier, on a les résultats suivants :

Corollaire 2.1. *Soit J un potentiel à décroissance rapide tel que \hat{J} ne s'annule pas sur \mathbb{U} . Alors c est à décroissance rapide.*

Preuve : une suite u est à décroissance rapide si et seulement si elle est dans A_a pour tout a de la forme $a_n = (1 + |n|)^k, k \geq 0$. Le résultat découle alors du théorème 2.1. ■

Corollaire 2.2. *Soit J un potentiel à portée finie tel que \hat{J} ne s'annule pas sur \mathbb{U} . Alors c est à décroissance exponentielle.*

Preuve : Comme J est de portée finie, il est dans A_α pour tout $\alpha > 1$. Comme \hat{J} ne s'annule pas sur \mathbb{U} , par continuité il existe $\alpha > 1$ tel que \hat{J} ne

s'annule pas sur U_α . On applique alors le théorème 2.1 et l'on a $c \in A_\alpha$.

■

Ainsi que nous l'avions annoncé, nous voyons qu'en l'absence de transition de phase, la décroissance de la covariance est directement liée à la décroissance de l'interaction. Dans les cas les plus fréquents, elle est très rapide. De toutes manières, l'absence de transition de phase est suffisante pour qu'on puisse avoir un théorème central limite avec une renormalisation standard – standard devant être compris au sens de “identique à celle du cas de variables indépendantes”.

2.1.2 Théorème de limite centrale

Théorème 2.2. *Soit J un potentiel tel que \hat{J} ne s'annule pas sur \mathbb{U} . Alors, si l'on pose $\Lambda_n = \{0, \dots, n-1\}^d$ et*

$$S_\Lambda = \left(\sum_{i \in \Lambda} X_i \right) - |\Lambda| \mathbb{E}_\mu X_0$$

où la loi de $X = (X_i)_{i \in \mathbb{Z}^d}$ est μ , l'unique loi gaussienne stationnaire de $\mathfrak{G}_{J,h}^\beta$, on a

$$\frac{S_{\Lambda_n}}{|\Lambda_n|^{\frac{1}{2}}} \Longrightarrow \mathcal{N}(0, \sigma^2),$$

avec

$$\sigma^2 = \frac{1}{\hat{J}(1)}.$$

Preuve : Comme X est gaussien stationnaire (de moyenne $m = \frac{h}{\hat{J}(1)}$), S_{Λ_n} est une variable gaussienne centrée. Pour montrer la convergence en loi annoncée, il suffit donc de montrer que $\frac{\mathbb{E}_\mu S_{\Lambda_n}^2}{|\Lambda_n|} \rightarrow \sigma^2$. On a la convergence en loi suivante :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_\mu S_{\Lambda_n}^2 &= \sum_{k,l \in \Lambda_n} c_{k-l} \\ &= \sum_{p \in \{-n, \dots, n\}^d} N_p^n c_p, \end{aligned}$$

avec

$$N_p^n = |\{k, l \in \Lambda_n; k - l = p\}|.$$

Un dénombrement simple montre que

$$N_p^n = \prod_{i=1}^d (n - |p_i|).$$

On a donc

$$\frac{1}{|\Lambda_n|} \mathbb{E}_\mu S_{\Lambda_n}^2 = \sum_{p \in \mathbb{Z}^d} x_p^n c_p,$$

avec $x_p^n = \prod_{i=1}^d (1 - \frac{|p_i|}{n})$ si $p \in \{-n, \dots, n\}^d$ et 0 sinon.

On a pour tous n, p $|x_p^n c_p| \leq |c_p|$ et pour tout p $\lim_{n \rightarrow \infty} x_p^n c_p = c_p$. J est dans A_1 et \hat{J} ne s'annule pas sur \mathbb{U} , donc d'après le théorème 2.1, $c \in A_1$, c'est à dire que c est sommable. D'après le théorème de convergence dominée, on a donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|\Lambda_n|} \mathbb{E}_\mu S_{\Lambda_n}^2 = \sum_{p \in \mathbb{Z}^d} c_p.$$

Mais

$$\sum_{p \in \mathbb{Z}^d} c_p = \hat{c}(1) = (\hat{J}(1))^{-1}.$$

D'où

$$\sigma^2 = \frac{1}{\hat{J}(1)}.$$

■

2.2 Influence de la transition de phase

Nous allons à présent évaluer la taille des coefficients $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}^d}$ lorsque \hat{J} s'annule sur \mathbb{U} . L'étude qui suit ne prétend pas à l'exhaustivité : il pourra apparaître dans certains cas que nos hypothèses ne sont pas minimales. Cependant, nous pensons être capable de mettre en lumière la nature des phénomènes induits par la présence de transition de phase.

Il va de soi qu'on ne peut se contenter de dire que \hat{J} s'annule. Nous allons supposer que \hat{J} ne s'annule qu'en un unique point de \mathbb{U} –on peut toujours sans restriction supposer que ce point est $z_0 = 1$, quitte à remplacer $\hat{J}(z)$ par $\hat{J}(z/z_0)$. (Nous verrons que, souvent, l'hypothèse que le zéro est unique apparaît de manière naturelle et n'est nullement restrictive.) Nous introduirons des hypothèses sur l'ordre de ce zéro. Afin de pouvoir utiliser des techniques d'analyse réelle, on va utiliser la carte sur \mathbb{U}

$$f(\theta_1, \dots, \theta_d) = \hat{J}(e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_d}).$$

Dès lors, avec les notations introduites plus haut, on a

$$c_n = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} e^{i\langle n, x \rangle} \frac{1}{f(x)} dx_1 \dots dx_n.$$

2.2.1 Un résultat d'analyse

A cet effet, nous allons démontrer un théorème d'analyse permettant d'estimer, et parfois de donner un équivalent à l'infini pour les coefficients de Fourier de certaines fonctions intégrables assez régulières partout, sauf en zéro où elles possèdent une singularité.

Notation Si f est une fonction de classe C^N sur \mathbb{R}^d et x un point régulier, on note $D_x^N f$ la différentielle N -ième de la fonction f au point x : c'est une application linéaire de $(\mathbb{R}^d)^{\otimes N}$ dans \mathbb{R} .

Théorème 2.3. *Soit $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^+$ dont $(2\pi\mathbb{Z})^d$ est un groupe de périodes et vérifiant les hypothèses suivantes :*

- f ne s'annule qu'en les points du réseau $(2\pi\mathbb{Z})^d$.
- il existe $N \in \mathbb{N}, d_0 \in \mathbb{R}$ vérifiant $0 < d_0 < \min(d, N)$ ainsi qu'une matrice $A \in Gl_d(\mathbb{R})$ et une fonction R de classe C^N telle que

$$f(x) = \|Ax\|^{d_0} + R(x),$$

avec pour tout k vérifiant $0 \leq k \leq N - 1$:

$$D_0^k R = 0.$$

Soit

$$c_n = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} e^{i\langle n, x \rangle} \frac{1}{f(x)} dx_1 \dots dx_n.$$

On pose alors $\alpha = d - d_0, \gamma = \frac{d}{2} - d_0, \beta = \frac{N(N+d-2d_0)}{N+d} = N - 2d_0 + \frac{2d_0d}{N+d}$ et

$$I_{d, d_0}(x) = \int_0^x J_{\frac{d-2}{2}}(t) t^{-d_0 + \frac{d}{2}} dt,$$

où J_ν désigne la fonction de Bessel de première espèce :

$$J_\nu(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(i(x \sin \theta - \nu \theta)) d\theta = \frac{(x/2)^\nu}{\Gamma(\nu + \frac{1}{2})\sqrt{\pi}} \int_{-1}^{+1} (1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}} e^{-itx} dt.$$

Si $d = 1$ et $N \geq 2$, on a l'équivalent :

$$c_n \sim \frac{1}{A} \frac{1}{\pi} \Gamma(\alpha) \cos\left(\frac{\pi}{2}\alpha\right) \frac{1}{|A^{-1}n|^\alpha},$$

Tandis que si $d \geq 2$, on a alors le développement asymptotique :

$$c_n = \frac{1}{\det A} K_d \frac{1}{\|A^{-1}n\|^{d-d_0}} I_{d, d_0}(\|A^{-1}n\|) + O(\|n\|^{-\beta}),$$

qui se précise comme suit :

– Si $d_0 > \frac{d-1}{2}$ et $N \geq d+1$, on a l'équivalent, quand $\|n\|$ tend vers $+\infty$:

$$c_n \sim \frac{K_d}{\det A} 2^{d_0-1} \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(\frac{d-1}{2}) \Gamma(\frac{d-d_0}{2})}{\Gamma(\frac{d_0}{2})} \frac{1}{\|A^{-1}n\|^{d-d_0}}.$$

– Si $d_0 \leq \frac{d-1}{2}$ (ce qui implique $d \geq 2$), on a

$$c_n = \frac{1}{\det A} K_d \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\|A^{-1}n\|^{\frac{d+1}{2}}} \cos(\|A^{-1}n\| - \frac{(d+1)\pi}{4}) + O(\|n\|^{-\min(\alpha, \beta, \frac{d+3}{2})}),$$

Soit, si $N > \frac{1}{4}(\sqrt{(d-4d_0-1)^2 + 8d(1+d)} - (d-4d_0-1))$

$$\overline{\lim}_{\|n\| \rightarrow +\infty} |c_n| \|A^{-1}n\|^{\frac{d+1}{2}} > 0$$

Si l'on suppose en plus $d_0 < \frac{d-1}{2}$, l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(c_n \|A^{-1}n\|^{\frac{d+1}{2}})_{n \in \mathbb{Z}^d}$ est exactement le segment

$$[-\frac{1}{\det A} K_d \sqrt{\frac{2}{\pi}}, \frac{1}{\det A} K_d \sqrt{\frac{2}{\pi}}].$$

Preuve :

D'après le théorème de séparation, on peut trouver une fonction h de classe C^∞ valant 0 sur le fermé $\{x \in [-\pi, \pi]^d, \|Ax\| \geq 1\}$ et 1 sur le fermé $\{x \in [-\pi, \pi]^d, \|Ax\| \leq \frac{1}{2}\}$. On a alors $\frac{1}{f} = \frac{h}{f} + \frac{1-h}{f}$, d'où

$$c_n = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} e^{i\langle n, x \rangle} \frac{h(x)}{f(x)} dx_1 \dots dx_n + \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} e^{i\langle n, x \rangle} \frac{1-h(x)}{f(x)} dx_1 \dots dx_n \quad (2.1)$$

La fonction

$$\frac{1-h}{f}$$

se laisse périodiser en une fonction de classe C^N , puisqu'elle coïncide avec la fonction périodique $\frac{1}{f}$ sur les bords du pavé $[-\pi, \pi]^d$. Ses coefficients de Fourier, qui représentent la deuxième partie de la somme en (2.1) sont donc en $O(\|n\|^{-N})$.

Étudions maintenant la première partie de la somme. Tirant partie du fait que le support de h est inclus dans $A^{-1}B(0, 1)$, on fait le changement de variables $y = Ax$, il se transforme en

$$\frac{1}{(2\pi)^d} \frac{1}{\det A} \int_{B(0,1)} e^{i\langle A^{-1}n, y \rangle} \frac{h_1(y)}{f_1(y)} dy_1 \dots dy_n,$$

où l'on a posé $h_1(y) = h(A^{-1}y)$ et $f_1(y) = f(A^{-1}y)$. Ainsi h_1 est C^∞ , vaut 1 sur $B(0, \frac{1}{2})$, tandis que f_1 ne s'annule qu'en 0 et vérifie l'identité

$$f_1(x) = \|x\|^{d_0} + R_1(x), \quad (2.2)$$

où R_1 vérifie les mêmes hypothèses que R .

On pose

$$s(x) = \frac{h_1(x)}{f_1(x)} - \frac{1}{\|x\|^{d_0}}$$

ainsi que

$$C(u) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{B(0,1)} e^{i\langle u, x \rangle} \frac{1}{\|x\|^{d_0}} dx_1 \dots dx_n,$$

de sorte que l'on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi)^d} \frac{1}{\det A} \int_{B(0,1)} e^{i\langle A^{-1}n, y \rangle} \frac{h_1(y)}{f_1(y)} dy_1 \dots dy_n &= \\ \frac{1}{\det A} C(A^{-1}n) &+ \\ + \frac{1}{(2\pi)^d} \frac{1}{\det A} \int_{B(0,1)} e^{i\langle A^{-1}n, x \rangle} s(x) dx_1 \dots dx_n. \end{aligned}$$

Si $d = 1$, on a

$$\begin{aligned} C(u) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{e^{iux}}{|x|^{d_0}} dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{\cos ux}{|x|^{d_0}} dx \\ &= \frac{1}{\pi} u^{d_0-1} \int_0^u \frac{\cos t}{t^{d_0}} dt. \end{aligned}$$

Or on sait (cf. par exemple [14]) que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{t^{d_0}} dt = \Gamma(1 - d_0) \sin\left(\frac{\pi}{2}d_0\right) = \Gamma(\alpha) \cos\left(\frac{\pi}{2}\alpha\right).$$

D'où

$$\frac{1}{A} C(A^{-1}n) \sim \frac{1}{A} \frac{1}{\pi} \Gamma(\alpha) \cos\left(\frac{\pi}{2}\alpha\right) \frac{1}{|A^{-1}n|^\alpha},$$

ce qui est l'estimation cherchée pour la partie principale.

Supposons maintenant $d \geq 2$. Si $O \in O_n(\mathbb{R})$, comme la mesure de Lebesgue est invariante sous l'action du groupe orthogonal, un changement de

variable montre aisément que $C(Ou) = C(u)$, de sorte que $C(u)$ ne dépend que de $\|u\|$.

Évaluons donc $C(\lambda e_1)$, où e_1 est le premier vecteur de la base canonique. Comme on intègre sur une boule, il est naturel de faire le changement de variable polaire

$$\begin{cases} x_1 &= r \cos \theta_1 \\ x_2 &= r \sin \theta_1 \cos \theta_2 \\ \dots & \\ x_{d-1} &= r \sin \theta_1 \sin \theta_2 \dots \sin \theta_{d-2} \cos \theta_{d-1} \\ x_d &= r \sin \theta_1 \sin \theta_2 \dots \sin \theta_{d-2} \sin \theta_{d-1} \end{cases}$$

On choisit d'imposer comme condition $r \in [0, 1]$, $(\theta_1, \dots, \theta_{d-2}) \in [0, \pi]^{d-2}$ et $\theta_{d-1} \in [-\pi, \pi]$. Calculons le Jacobien de ce changement de variable : $\frac{D(x_1, \dots, x_d)}{D(r, \theta_1, \dots, \theta_{d-1})}$. On définit le vecteur ligne L_d par

$$L_d(\theta_1, \dots, \theta_{d-1}) = \frac{\partial}{\partial r}(x_1, \dots, x_d)$$

et la matrice $(d-1) \times d : Q_d$ par

$$(Q_d)_{i,j}(r, \theta_1, \dots, \theta_{d-1}) = \frac{\partial x_j}{\partial \theta_i}.$$

Le Jacobien d'ordre d est donc

$$\mathcal{D}_d(r, \theta_1, \dots, \theta_{d-1}) = \begin{vmatrix} L_d(\theta_1, \dots, \theta_{d-1}) \\ Q_d(r, \theta_1, \dots, \theta_{d-1}) \end{vmatrix}$$

D'autre part, on a

$$\mathcal{D}_d(r, \theta_1, \dots, \theta_{d-1}) = \begin{vmatrix} \cos \theta_1 & \sin \theta_1 L_{d-1}(\theta_2, \dots, \theta_{d-1}) \\ -r \sin \theta_1 & r \cos \theta_1 L_{d-1}(\theta_2, \dots, \theta_{d-1}) \\ 0 & \sin \theta_1 Q_{d-1}(r, \theta_2, \dots, \theta_{d-1}) \end{vmatrix}$$

En développant par rapport à la première ligne, on a

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_d(r, \theta_1, \dots, \theta_{d-1}) &= r \cos^2 \theta_1 (\sin \theta_1)^{d-2} \mathcal{D}_{d-1}(r, \theta_2, \dots, \theta_{d-1}) \\ &+ r \sin^2 \theta_1 (\sin \theta_1)^{d-2} \mathcal{D}_{d-1}(r, \theta_2, \dots, \theta_{d-1}) \\ &= r (\sin \theta_1)^{d-2} \mathcal{D}_{d-1}(r, \theta_2, \dots, \theta_{d-1}) \end{aligned}$$

Comme $\mathcal{D}_2(r, \theta) = r$, on a

$$\mathcal{D}_d(r, \theta_1, \dots, \theta_{d-1}) = r^{d-1} \prod_{k=1}^{d-2} (\sin \theta_k)^{d-1-k}.$$

On a donc

$$\begin{aligned}
C(\lambda e_1) &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_0^1 \int_{[0,\pi[^{d-2} \times]-\pi,\pi[} \frac{e^{i\lambda r \cos \theta_1}}{r^{d_0}} r^{d-1} \prod_{k=1}^{d-2} (\sin \theta_k)^{d-1-k} d\theta_1 \dots d\theta_{d-1} dr \\
&= K_d \int_0^1 \int_0^\pi e^{i\lambda r \cos \theta} (\sin \theta)^{d-2} d\theta r^{-1+\alpha} dr \\
&= K_d \lambda^{-\alpha} \int_0^\lambda \int_0^\pi e^{ir \cos \theta} (\sin \theta)^{d-2} d\theta r^{-1+\alpha} dr \\
&= K_d \lambda^{-\alpha} \int_0^\lambda \int_{-1}^1 e^{irx} (1-x^2)^{\frac{d-3}{2}} dx r^{-1+\alpha} dr \\
&= K_d \sqrt{\pi} 2^{\frac{d-2}{2}} \Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right) \lambda^{-\alpha} \int_0^\lambda J_{\frac{d-2}{2}}(r) r^{-\frac{d-2}{2}} r^{-1+\alpha} dr \\
&= K_d \sqrt{\pi} 2^{\frac{d-2}{2}} \Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right) \lambda^{-\alpha} \int_0^\lambda J_{\frac{d-2}{2}}(r) r^{\frac{d}{2}-d_0} dr,
\end{aligned}$$

où l'on a posé

$$K_d = \frac{2}{(2\pi)^d} \prod_{k=0}^{d-3} 2W_k = \frac{1}{2\pi^d} \prod_{k=0}^{d-2} W_k,$$

où W_k est l'intégrale de Wallis

$$W_k = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin \theta)^k d\theta.$$

Il est bien connu que l'on a

$$W_{2p} = \frac{\pi (2p)!}{2 p!^2 2^{2p}} \text{ et } W_{2p+1} = \frac{p!^2 2^{2p}}{(2p+1)!}.$$

On a donc

$$\begin{aligned}
\prod_{i=0}^{2k-1} W_i &= \prod_{p=0}^{k-1} W_{2p} W_{2p+1} \\
&= \prod_{p=0}^{k-1} \frac{\pi}{2} \frac{1}{2p+1} \\
&= \left(\frac{\pi}{2}\right)^k \frac{1}{1 \times 3 \times \dots \times (2k-1)} \\
&= \left(\frac{\pi}{2}\right)^k \frac{k! 2^k}{(2k)!} \\
&= \pi^k \frac{k!}{(2k)!}.
\end{aligned}$$

Ceci permet de calculer

$$K_{2k+2} = \frac{1}{2\pi^{k+2}} \frac{k!}{(2k)!} \quad (2.3)$$

$$K_{2k+1} = \frac{1}{2^{2k} \pi^k (k-1)!}, \quad (2.4)$$

ce qui peut se condenser en

$$K_d = \left(\pi^{\frac{d+1}{2}} 2^{d-1} \Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right) \right)^{-1}.$$

Remarque Nous ouvrons ici une parenthèse pour donner quelques indications sur une preuve alternative de l'expression de $C(\lambda e_1)$. Elle est basée sur les formules d'intégrations par tranche suivantes : pour f intégrable sur \mathbb{R}^d , g intégrable sur \mathbb{R}^k et P la projection canonique de \mathbb{R}^d sur \mathbb{R}^k , avec $k < d$ on a

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x) dx = \int_0^{+\infty} r^{d-1} \int_{S_{d-1}} f(ru) d\sigma(u) dr$$

et

$$\int_{S_{d-1}} (g \circ P)(u) d\sigma(u) = c(d, k) \int_{B_k(0,1)} (1 - \|x\|^2)^{\frac{d-k}{2}-1} g(x) dx,$$

où $c(d, k)$ est une constante dépendant exclusivement des dimensions d et k . La première formule est classique. Pour la deuxième formule, on pourra se rapporter à Rudin [42], qui en donne l'analogie pour des fonctions sur \mathbb{C}^d – la preuve est la même, mis à part que le volume d'une boule de rayon r est proportionnel à r^{2d} dans \mathbb{C}^d et à r^d dans \mathbb{R}^d . En combinant ces deux formules, on obtient pour $g \circ \|\cdot\|$ intégrable :

$$\int_{\mathbb{R}^d} e^{i\lambda x_1} g(\|x\|) dx = G_d \int_0^{+\infty} r^{d-1} g(r) \int_{-1}^{+1} (1-t^2)^{\frac{d-1}{2}-1} e^{ir\lambda t} dt dr$$

Il s'agit de déterminer G_d . Mais dans la théorie des fonctions de Bessel, on montre que pour $\operatorname{Re} \nu + \frac{1}{2} > 0$ et x réel, on a

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k + \nu + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} = \frac{1}{\Gamma(\nu + \frac{1}{2}) \sqrt{\pi}} \int_{-1}^{+1} (1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}} e^{-itx} dt,$$

d'où pour $x = 0$

$$\frac{1}{\Gamma(\nu + 1)} = \frac{1}{\Gamma(\nu + \frac{1}{2}) \sqrt{\pi}} \int_{-1}^{+1} (1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}} dt.$$

En prenant $\lambda = 0$, puis par exemple $g(r) = \exp(-\frac{r^2}{2})$, on peut facilement déterminer la constante G_d . Le calcul de $C(\lambda e_1)$ s'en déduit alors, en prenant $g(r) = \frac{1}{r^{d_0}} \mathbb{1}_{[0,1]}(r)$ et en utilisant la représentation intégrale des fonctions de Bessel .

■

Il reste à contrôler

$$\int_{B(0,1)} e^{i\langle A^{-1}n, x \rangle} dx$$

Nous allons utiliser la formule de Green, que l'on peut considérer ici comme une intégration par parties multidimensionnelle. On sait que si V est un volume dont la frontière est une variété C^∞ orientable, que u et ϕ sont des applications respectivement C^2 et C^1 de V dans \mathbb{R} , on a

$$\int_V \phi \Delta u \, dx = \int_{\partial V} \phi \langle \text{grad } u, \vec{N}(x) \rangle \, d\sigma(x) - \int_V \langle \text{grad } u, \text{grad } \phi \rangle dx,$$

où $\vec{N}(x)$ désigne le vecteur unitaire normal à ∂V orienté vers l'extérieur de V et σ désigne la mesure superficielle sur la surface ∂V . La formule reste valide si $d = 1$ et $V = [a, b]$ avec $a < b$: on a alors $\sigma = \delta_a + \delta_b$, où δ_x désigne la mesure de Dirac au point x , ainsi que l'on a $\vec{N}(a) = -1$ et $\vec{N}(b) = 1$: c'est alors une intégration par parties classique. Si l'on prend $u(x) = -\frac{1}{\|n\|^2} e^{i\langle n, x \rangle}$, on a $\text{grad } u = -\frac{in}{\|n\|^2} e^{i\langle n, x \rangle}$ et $\Delta u = e^{i\langle n, x \rangle}$, d'où

$$\int_V \phi e^{i\langle n, x \rangle} \, dx = -\frac{i}{\|n\|} \int_{\partial V} \phi \langle v, \vec{N}(x) \rangle e^{i\langle n, x \rangle} \, d\sigma(x) + \frac{i}{\|n\|} \int_V D_x^1 \phi(v) e^{i\langle n, x \rangle} \, dx, \quad (2.5)$$

où l'on a posé $v = \frac{n}{\|n\|}$. En itérant le procédé, on obtient, pour ϕ de classe C^N :

$$\begin{aligned} \int_V \phi e^{i\langle n, x \rangle} \, dx &= \sum_{k=0}^{N-1} \frac{i^{k-1}}{\|n\|^{k+1}} \int_{\partial V} D_x^k \phi(v^{\otimes k}) \langle v, \vec{N}(x) \rangle e^{i\langle n, x \rangle} \, d\sigma(x) \\ &+ \frac{i^N}{\|n\|^N} \int_V D_x^N \phi(v^{\otimes N}) \langle v, \vec{N}(x) \rangle e^{i\langle n, x \rangle} \, dx \end{aligned}$$

Ici, on va prendre $V = V_{r_n} = \{x \in \mathbb{R}^d \mid r_n \leq \|x\| \leq 1\}$, où r_n est une suite de limite nulle à déterminer et $\phi = s$. Afin de contrôler la taille des différentielles, nous aurons besoin du lemme suivant :

Lemme 13. *Il existe une constante K telle que*

$$0 < \|x\| < \frac{1}{2} \Rightarrow \quad \forall k \leq N \quad \sup_{\|h\|=1} |D_x^k s(h^{\otimes k})| \leq K \|x\|^{N-2d_0-k} \quad (2.6)$$

Pour ne pas nuire à la lisibilité de la preuve en cours, nous admettons pour l'instant ce lemme technique. On a alors

$$\begin{aligned} \left| \int_{V_{r_n}} s(x) e^{i\langle n, x \rangle} dx \right| &\leq K S_d r_n^{d-1} \frac{r_n^{N-2d_0}}{\|n\|} \sum_{k=0}^{N-1} (\|n\| r_n)^{-k} \\ &+ \frac{K B_d}{\|n\|^N} r_n^{-2d_0} \end{aligned}$$

où S_d désigne l'aire de la sphère d -dimensionnelle et B_d le volume de la boule d -dimensionnelle. D'autre part, en intégrant l'inégalité (13) avec $k = 0$, on obtient

$$\int_{B(0, r_n)} |s(x)| dx \leq \frac{K}{d + N - 2d_0} r_n^{d+N-2d_0}$$

Puis, en combinant les deux inégalités, on a

$$\begin{aligned} \left| \int_{B(0,1)} s(x) e^{i\langle n, x \rangle} dx \right| &\leq K S_d r_n^{d-1} \frac{r_n^{N-2d_0}}{\|n\|} \sum_{k=0}^{N-1} (\|n\| r_n)^{-k} \\ &+ \frac{K B_d}{\|n\|^N} r_n^{-2d_0} \\ &+ \frac{K}{d + N - 2d_0} r_n^{d+N-2d_0} \end{aligned}$$

On choisit alors r_n de manière à ce que les deux derniers termes de la somme – que l'on suppose être les plus importants – soient du même ordre, soit

$$r_n = \frac{1}{\|n\|^{\frac{N}{N+d}}}$$

et l'on obtient finalement

$$\left| \int_{B(0,1)} s(x) e^{i\langle n, x \rangle} dx \right| = O\left(\frac{1}{\|n\|^{\frac{N(N+d-2d_0)}{N+d}}}\right) \quad (2.7)$$

Il nous faut à présent étudier le comportement de $I_\alpha(x)$. Pour $\gamma < \frac{1}{2}$, l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} J_{\frac{d-2}{2}}(t) t^\gamma dt \quad (2.8)$$

est semi-convergente et l'on sait calculer sa valeur. De manière générale, si ν et μ sont des nombres complexes vérifiant

$$0 < \operatorname{Re} \mu < \operatorname{Re} \nu + \frac{3}{2},$$

on a

$$\int_0^{+\infty} \frac{J_\nu(t)}{t^{\nu-\mu+1}} dt = \frac{\Gamma(\frac{\mu}{2})}{2^{\nu-\mu+1}\Gamma(\nu - \frac{1}{2}\mu + 1)}.$$

Cette intégrale est parfois appelée intégrale de Weber, du nom du premier mathématicien à donner les valeurs de l'intégrale pour ν entier. Pour une preuve et un historique des résultats, on pourra se reporter à [49], §13.24, page 391.

Ici, on a $\nu = \frac{d-2}{2}$ et $\mu = d - d_0 = \alpha$, soit

$$\int_0^{+\infty} J_{\frac{d-2}{2}}(t)t^\gamma dt = \frac{\Gamma(\frac{d-d_0}{2})}{2^{\frac{d}{2}-d_0}}.$$

Comme $N > d$ implique $\beta > \alpha = d - d_0$, on en déduit l'équivalent souhaité.

Passons au cas où $\gamma \geq \frac{1}{2}$. Dans ce cas, l'intégrale considérée en (2.8) est divergente, mais l'on peut néanmoins évaluer la taille de $I_\alpha(x)$ en utilisant un développement asymptotique des fonctions de Bessel. Les fonctions de Bessel sont liées aux fonctions de Hankel H_ν^1 et H_ν^2 par la relation

$$J_\nu = \frac{1}{2}(H_\nu^1 + H_\nu^2).$$

Or, sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$, on a des développements asymptotiques à une précision arbitraire :

$$\begin{cases} H_\nu^1(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} z^{-\frac{1}{2}} e^{i(z - \frac{\pi}{4} - \frac{\nu\pi}{2})} (1 + \frac{a_1}{z} + \dots + \frac{a_n}{z^n} + O(\frac{1}{|z|^{n+1}})) \\ H_\nu^2(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} z^{-\frac{1}{2}} e^{-i(z - \frac{\pi}{4} - \frac{\nu\pi}{2})} (1 + \frac{b_1}{z} + \dots + \frac{b_n}{z^n} + O(\frac{1}{|z|^{n+1}})) \end{cases}$$

Pour un exposé des résultats évoqués, on peut se référer à [14], chap. XV.

On a alors

$$\begin{aligned} \int_0^x H_{\frac{d-2}{2}}^1(t)t^\gamma dt &= \int_0^1 H_{\frac{d-2}{2}}^1(t)t^\gamma dt \\ &+ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_1^x t^{\gamma-\frac{1}{2}} e^{i(t-(d-1)\frac{\pi}{4})} dt \\ &+ \sqrt{\frac{2}{\pi}} a_1 \int_1^x t^{\gamma-\frac{3}{2}} e^{i(t-(d-1)\frac{\pi}{4})} dt \\ &+ \int_1^x t^{\gamma-\frac{1}{2}} e^{i(t-(d-1)\frac{\pi}{4})} \phi(t) dt, \end{aligned}$$

avec $\phi(t) = O(\frac{1}{t^2})$. On en tire immédiatement

$$\begin{aligned} \int_0^x H_{\frac{d-2}{2}}^1(t)t^\gamma dt &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_1^x t^{\gamma-\frac{1}{2}} e^{i(t-(d-1)\frac{\pi}{4})} dt \\ &+ \sqrt{\frac{2}{\pi}} a_1 \int_1^x t^{\gamma-\frac{3}{2}} e^{i(t-(d-1)\frac{\pi}{4})} dt \\ &+ O(x^{\max(\gamma-\frac{3}{2},0)}). \end{aligned}$$

Une intégration par parties donne

$$\int_1^x t^{\gamma-\frac{3}{2}} e^{i(t-(d-1)\frac{\pi}{4})} dt = [t^{\gamma-\frac{3}{2}} e^{i(t-(d-1)\frac{\pi}{4})}]_1^x \int_1^x (\gamma - \frac{3}{2}) t^{\gamma-\frac{5}{2}} e^{i(t-(d-1)\frac{\pi}{4})} dt,$$

D'où

$$\int_1^x t^{\gamma-\frac{3}{2}} e^{i(t-(d-1)\frac{\pi}{4})} dt = O(x^{\max(\gamma-\frac{3}{2},0)}).$$

De la même manière

$$\int_1^x t^{\gamma-\frac{1}{2}} e^{i(t-(d-1)\frac{\pi}{4})} dt = [t^{\gamma-\frac{1}{2}} e^{i(t-(d-1)\frac{\pi}{4})}]_1^x - \int_1^x (\gamma - \frac{1}{2}) t^{\gamma-\frac{3}{2}} e^{i(t-(d-1)\frac{\pi}{4})} dt,$$

La valeur absolue de l'intégrale dans le second membre se majore comme précédemment, et l'on a enfin

$$\int_0^x H_{\frac{d-2}{2}}^1(t)t^\gamma = \sqrt{\frac{2}{\pi}} x^{\gamma-\frac{1}{2}} e^{i(x-\frac{(d+1)\pi}{4})} + O(x^{\max(\gamma-\frac{3}{2},0)}).$$

De même

$$\int_0^x H_{\frac{d-2}{2}}^2(t)t^\gamma = \sqrt{\frac{2}{\pi}} x^{\gamma-\frac{1}{2}} e^{-i(x-\frac{(d+1)\pi}{4})} + O(x^{\max(\gamma-\frac{3}{2},0)}).$$

Par suite

$$\int_0^x J_{\frac{d-2}{2}}(t)t^\gamma = \sqrt{\frac{2}{\pi}} x^{\gamma-\frac{1}{2}} \cos(x - \frac{(d+1)\pi}{4}) + O(x^{\max(\gamma-\frac{3}{2},0)}).$$

Il s'ensuit

$$c_n = \frac{1}{\det A} K_d \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{2^{d-1}} \frac{1}{\|A^{-1}n\|^{\frac{d+1}{2}}} \cos(\|A^{-1}n\| - \frac{(d+1)\pi}{4}) + O(\|n\|^{-\min(\alpha, \beta, \frac{d+3}{2})}).$$

Supposons maintenant $\gamma > \frac{1}{2}$ et $N > \frac{1}{4}(\sqrt{(d-4d_0-1)^2 + 8d(1+d)} - (d-4d_0-1))$, ce qui est équivalent à $\beta > \frac{d+1}{2}$. Dès lors, on a $\min(\alpha, \beta, \frac{d+3}{2}) > \frac{d+1}{2}$. Pour

montrer les égalités concernant l'amplitude de l'oscillation de (c_n) , il suffit de montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(\cos(\|A^{-1}n\| - \frac{(d+1)\pi}{4}))_{n \in \mathbb{Z}^d}$ est le segment $[-1, 1]$. Or il est bien connu, que si $\theta \notin \pi\mathbb{Q}$, l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(e^{ip\theta})_{p \geq 0}$ est le cercle unité. Donc si l'on trouve $n_0 \in \mathbb{Z}^d$ tel que $\|A^{-1}n_0\| \notin \pi\mathbb{Q}$, il suffira de considérer la sous-suite c_{pn_0} .

Pour trouver un tel élément, on va s'appuyer sur le lemme suivant :

Lemme 14. *Soit M un sous-module de \mathbb{R}^d dont tous les éléments ont une norme euclidienne rationnelle.*

Alors $\dim M \leq 1$.

Preuve : Si M n'est pas réduit à $\{0\}$, il contient un élément u de norme rationnelle non nulle que, par homothétie, on peut supposer entière : on peut donc trouver $e_1 \in \mathbb{R}^d$ unitaire et $p \in \mathbb{N}^*$ avec $u = pe_1 \in M$. Si $\dim M \geq 2$, on peut trouver $v \in M$ indépendant de u . On peut également trouver $e_2 \in \mathbb{R}^d$ tel que (e_1, e_2) forme une base orthonormale de $\text{Vect}(u, v)$. Notons $v = xe_1 + ye_2$. Comme u et v sont indépendants, on a $y \neq 0$. Comme $u, v, u + v \in M$, on a

$$2\langle u, v \rangle = \|u + v\|^2 - \|u\|^2 \in \mathbb{Q}.$$

Or $2\langle u, v \rangle = 2px$: on a donc $x \in \mathbb{Q}$, puis $y^2 = \|v\|^2 - x^2 \in \mathbb{Q}$. Soit $\lambda \in \mathbb{Z}^*$ tel que $\lambda x \in \mathbb{Z}$ et $\lambda^2 y^2 \in \mathbb{Z}$. Posons $z = (\lambda p)v - (\lambda x)u$: on a $z \in M$ et $z = \lambda p y e_2$. Pour $a \in \mathbb{Z}^*$, posons $t = au + z$: on a

$$\|t\|^2 = a^2 p^2 + p^2 (\lambda y)^2 \in \mathbb{Z}$$

Or $t \in M$: $\|t\|^2$ est donc à la fois un entier et le carré d'un rationnel : comme \mathbb{Z} est factoriel, $\|t\|^2$ est le carré d'un entier. Comme $y\lambda p \neq 0$, on a $\|t\|^2 > |ap|^2$, d'où $\|t\|^2 \geq (|ap| + 1)^2$, d'où

$$|y^2 (\lambda p)^2| \geq 2|ap| + 1,$$

ce qui est évidemment faux dès que l'on choisit a suffisamment grand. Contradiction.

■

Pour montrer l'existence de n_0 , il suffit alors d'appliquer le lemme qui précède au module $M = \frac{1}{\pi} A^{-1} \mathbb{Z}^d$, puisque l'on a $\dim M = d \geq 2$.

Pour $\gamma = \frac{1}{2}$, il convient d'être un peu plus précis dans le développement : on a

$$H_{\frac{d-2}{2}}^1(t)t^\gamma = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{i(t-(d-1)\frac{\pi}{4})} + \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{i(t-(d-1)\frac{\pi}{4})} \left(\frac{a_1}{t} + O\left(\frac{1}{t^2}\right) \right)$$

De sorte que, par les mêmes techniques que plus haut, on montre que

$$\int_0^\infty H_{\frac{d-2}{2}}^1(t)t^\gamma - \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{i(t-(d-1)\frac{\pi}{4})} dt$$

est semi-convergente. En faisant le même travail sur $H_0^2 t^{\frac{1}{2}}$, on trouve le développement

$$I_{\frac{d+1}{2},d}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos\left(x - \frac{(d+1)\pi}{4}\right) + B + o(1),$$

avec

$$B = \int_0^{+\infty} J_{\frac{d-2}{2}}(t)t^{\frac{1}{2}} - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos\left(t - (d-1)\frac{\pi}{4}\right) dt.$$

Ceci suffit pour affirmer

$$\overline{\lim}_{\|n\| \rightarrow +\infty} |c_n| \|A^{-1}n\|^{\frac{d+1}{2}} > 0$$

puisque le même raisonnement que précédemment montre que, l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $c_n \|A^{-1}n\|^{\frac{d+1}{2}}$ est exactement le segment

$$\left[\frac{K_d}{\det A} \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} + B \right), \frac{K_d}{\det A} \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} + B \right) \right].$$

Il est temps à présent de démontrer le lemme 13.

Preuve du lemme 13 : Pour calculer et majorer les différentielles successives au point x , nous allons effectuer un développement limité de d au voisinage de x , puisque l'on sait que l'on a

$$s(x+h) = \sum_{k=0}^N \frac{1}{k!} D_x^k s(h^{\otimes k}) + o(\|h\|^N).$$

Comme sur $B(0, \frac{1}{2})$, on a $h_1 = 1$, il vient

$$s(x+h) = F_{\|x\|^{d_0}, R_1(x)}(u_x(h), v_x(h)),$$

où l'on a posé

$$\begin{aligned} F_{A,B}(h_1, h_2) &= (A + B + h_1 + h_2)^{-1} - (A + h_1)^{-1} \\ u_x(h) &= \|x+h\|^{d_0} - \|x\|^{d_0} \\ v_x(h) &= R_1(x+h) - R_1(x) \end{aligned}$$

On a

$$F_{A,B}(h_1, h_2) = (B + h_2)(A + h_1)^{-1}((A + B) + (h_1 + h_2))^{-1}$$

On a, dans $\mathbb{R}[[h_1, h_2]]$ les égalités

$$\begin{aligned} \frac{1}{A + h_1} &= \sum_{k \geq 0} \frac{1}{A^{k+1}} (-1)^k h_1^k \\ \frac{1}{A + B + h_1 + h_2} &= \sum_{k \geq 0} \frac{1}{(A + B)^{k+1}} (-1)^k (h_1 + h_2)^k \\ &= \sum_{k \geq 0} \frac{1}{(A + B)^{k+1}} (-1)^k \sum_{a+b=k} \binom{a+b}{a} h_1^a h_2^b \\ &= \sum_{a,b \geq 0} \binom{a+b}{a} \frac{1}{(A + B)^{a+b+1}} (-1)^{a+b} h_1^a h_2^b \end{aligned}$$

D'où, en faisant le produit

$$\begin{aligned} F_{A,B}(h_1, h_2) &= \sum_{a,b,k \geq 0} \binom{a+b}{a} (-1)^{a+b+k+1} \times \\ &\quad \left(\frac{B}{A^{k+1}(A+B)^{a+b+1}} h_1^{a+k} h_2^b + \frac{1}{A^{k+1}(A+B)^{a+b+1}} h_1^{a+k} h_2^{b+1} \right) \end{aligned}$$

Développons à présent $u_x(h)$: on a

$$\|x + h\|^{d_0} = \|x\|^{d_0} \left(1 + 2 \frac{\langle x, h \rangle}{\|x\|^2} + \frac{\langle h, h \rangle}{\|x\|^2} \right)^{\frac{d_0}{2}}$$

Or on a dans $\mathbb{R}[[x]]$

$$(1 + x)^{\frac{d_0}{2}} = \sum_{i \geq 0} \binom{\frac{d_0}{2}}{i} x^i$$

Tandis que

$$\left(2 \frac{\langle x, h \rangle}{\|x\|^2} + \frac{\langle h, h \rangle}{\|x\|^2} \right)^i = \sum_{l=0}^i \binom{i}{l} \frac{1}{\|x\|^{2i}} (2\langle x, h \rangle)^{i-l} \langle h, h \rangle^l$$

On en déduit, pour tout $n \geq 1$

$$\frac{D_0^n u_x(h^{\otimes n})}{n!} = \sum_{i \leq \frac{n}{2}} \binom{\frac{d_0}{2}}{i} \binom{i}{n-i} \frac{1}{\|x\|^{2i}} (2\langle x, h \rangle)^{2i-n} \langle h, h \rangle^{n-i} \|x\|^{d_0}$$

Et alors, en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$\left| \frac{D_0^n u_x(h^{\otimes n})}{n!} \right| \leq \sum_{i \leq \frac{n}{2}} \binom{\frac{d_0}{2}}{i} \binom{i}{n-i} 2^{2i-n} \|x\|^{d_0-n} \|h\|^n$$

Donc on peut trouver K_u tel que pour $k \leq N$

$$\left| \frac{D_0^n u_x(h^{\otimes n})}{n!} \right| \leq K_u \|x\|^{d_0-n} \|h\|^n \quad (2.9)$$

D'autre part, comme $R_1(0) = D_0^1 R_1 = \dots = D_0^{N-1} R_1 = 0$, la formule de Taylor donne

$$\forall k \leq N \quad \|D_x^k R_1\| = O(\|x\|^{N-k}),$$

ou de manière équivalente, il existe une constante K telle que

$$\forall x \quad \|x\| < \frac{1}{2} \forall k \leq N \quad \left| \frac{D_0^k v_x(h^{\otimes k})}{k!} \right| \leq K_v \|x\|^{N-k} \|h\|^k. \quad (2.10)$$

La composante homogène de degré n en h dans $u_x(h)^{a+k} v_x(h)^b$ est

$$\Phi_{a,b,k}^n(h) = \sum \prod_{p=1}^{a+k} \frac{D_0^{i_p} u_x(h^{\otimes i_p})}{i_p!} \prod_{p=1}^b \frac{D_0^{j_p} v_x(h^{\otimes j_p})}{j_p!}$$

où la somme a lieu sur les entiers non nuls vérifiant

$$\sum_{p=1}^{a+k} i_p + \sum_{p=1}^b j_p = n.$$

Pour que cette somme soit non nulle, il est nécessaire d'avoir $n \geq a + k + b$. Dans cette situation, les majorations (2.9) et (2.10) montrent qu'on peut trouver K tel que pour $|x| < \frac{1}{2}$, on ait la majoration

$$|\Phi_{a,b,k}^n(h)| \leq K \|x\|^{(a+k)d_0 + bN - n} \|h\|^n. \quad (2.11)$$

En composant les deux développements, on a

$$\begin{aligned} \frac{D_x^n(h^{\otimes n})}{n!} &= \sum_{a,b,k \geq 0, a+b+k=n} \binom{a+b}{a} (-1)^{a+b+k+1} \frac{R_1(x) \Phi_{a,b,k}^n(h)}{\|x\|^{(k+1)d_0} (\|x\|^{d_0} + R_1(x))^{a+b+1}} \\ &+ \sum_{a,b,k \geq 0, a+b+k+1=n} \binom{a+b}{a} (-1)^{a+b+k+1} \frac{\Phi_{a,b+1,k}^n(h)}{\|x\|^{(k+1)d_0} (\|x\|^{d_0} + R_1(x))^{a+b+1}} \end{aligned}$$

En appliquant les majorations trouvées en (2.11) et le fait que $R_1(x)$ est négligeable devant $\|x\|^{d_0}$, on trouve que chaque terme de la somme est majoré par

$$K'\|x\|^{N-2d_0+b(N-d_0)-n} \leq K''\|x\|^{N-2d_0-n},$$

ce qui donne manifestement ce que l'on voulait démontrer.

■

2.2.2 Décroissance de la covariance

Le théorème qui suit est une relecture du résultat d'analyse que nous venons d'établir en termes de décroissance de la covariance de la mesure de Gibbs gaussienne centrée associée à un potentiel.

Théorème 2.4. *Soit J un potentiel. On pose, pour $(\theta_1, \dots, \theta_d)$*

$$f(\theta_1, \dots, \theta_d) = \hat{J}(e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_d})$$

On suppose que f vérifie les hypothèses suivantes :

- *f ne s'annule qu'en les points du réseau $(2\pi\mathbb{Z})^d$.*
- *il existe un entier N , un réel d_0 vérifiant $0 < d_0 < \min(d, N)$, une matrice $A \in Gl_d(\mathbb{R})$ et une fonction R de classe C^N telle que*

$$f(x) = \|Ax\|^{d_0} + R(x),$$

avec pour tout k vérifiant $0 \leq k \leq N - 1$:

$$D_0^k R = 0.$$

Alors, on dispose des résultats suivants sur la covariance $\mathbb{E}_\mu X_0 X_n$

<i>ordre du zéro</i>	<i>valeur de N</i>	<i>vitesse de décroissance</i>	<i>signe à l'infini</i>
$d_0 < \frac{d-1}{2}$	$N > \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{d(1+d)}$	$1/(n ^{\frac{d+1}{2}})$	+ et -
$d_0 = \frac{d-1}{2}$	$N > \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{d(1+d)}$	$1/(n ^{\frac{d+1}{2}})$?
$d_0 > \frac{d-1}{2}$	$N \geq d + 1$	$1/(n ^{d-d_0})$	+

Remarques

1. Le théorème énoncé ci-dessus n'est pas exhaustif : il est probable que les valeurs minimales de N annoncées ici pour pouvoir donner les conclusions du théorème 2.4 ne soient pas optimales. Notre but est, dans un premier temps, de mettre en lumière les différentes sortes de pathologies qu'induit la présence d'une transition de phase.

2. Avant de donner des applications de ce théorème à la théorie des probabilités, il nous paraît important de le situer un peu dans un contexte mathématique plus général. Ce théorème fait partie de la grande famille des résultats sur les intégrales oscillantes, de la forme

$$\int \psi e^{i\phi}.$$

Cette expression un peu magique en évoque immédiatement d'autres : coefficients de Fourier, méthode de la phase stationnaire, méthode du col ou de la plus grande pente... Autant de techniques parmi lesquelles il peut être difficile de choisir d'autant que les terminologies peuvent varier selon les auteurs et les langues. Malgré la profonde unité qu'il y a entre les différents résultats, il y a une réelle difficulté à choisir les outils les plus adaptés au cas précis qui nous intéresse. A cet effet, la lecture du chapitre II d'Erdelyi [17] est une aide très précieuse. En dimension $d = 1$, les résultats analogues à celui démontré ci-dessus sont pléthoriques et l'on trouve beaucoup mieux qu'ici tant sur le plan de la faiblesse des hypothèses (voir par exemple Zygmund [50] t. I p. 190) que sur celui de la précision du développement asymptotique (cf. [17]). L'énoncé et la preuve de Dieudonné [14] IV.4 permettent de voir comment se combinent les hypothèses de singularité de ψ et de stationnarité de ϕ . En dimension plus grande, la littérature se fait beaucoup plus rare : outre –même s'il est formulé différemment– le résultat de Spitzer [45], sur lequel nous reviendrons, il convient de citer Stein [47] chap. VIII, §2 et Harthong [21] partie I, qui travaillent tous deux avec $\psi \in C^\infty$ à support compact mais usent de méthodes assez différentes.

2.2.3 Application aux marches aléatoires apériodiques sur \mathbb{Z}^3

Nous voulons ici mettre en évidence les liens existant entre des marches aléatoires symétriques apériodiques et certains systèmes gaussiens en interaction. En particulier, des estimations de la fonction de Green de la marche aléatoire donnent des renseignements sur la covariance du système gaussien, et réciproquement. Certaines des remarques faites ici ont déjà été faites par Spitzer [46].

Proposition 2.1. *Soit ν la loi de chaque pas d'une marche aléatoire symétrique apériodique sur \mathbb{Z}^3 possédant un moment d'ordre 4.*

On définit la fonction de Green de cette marche aléatoire par

$$G(n) = \sum_{k \geq 0} \nu^{*k}(n), \quad n \in \mathbb{Z}^3.$$

($G(n)$ est l'espérance du nombre de passages au point n de la marche aléatoire partant de zéro et dont chaque pas suit la loi ν)

On introduit la forme quadratique Q sur \mathbb{R}^3 suivante :

$$Q(\theta) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^3} \nu(n) \langle n, \theta \rangle^2, \quad \theta \in \mathbb{R}^3.$$

Alors on a l'équivalent en l'infini :

$$G(n) \sim \frac{1}{2\pi} \frac{1}{(\det Q \langle n, \tilde{Q}^{-1}n \rangle)^{\frac{1}{2}}}$$

Preuve : On va montrer que $N = 4$. On introduit la fonction caractéristique de la marche aléatoire :

$$\phi(\theta) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^3} \nu(n) e^{i \langle n, \theta \rangle}, \quad \theta \in \mathbb{R}^3$$

Posons $e_n \theta = e^{i \langle n, \theta \rangle}$ On a

$$D_\theta^k e_n(h^{\otimes k}) = e^{i \langle n, \theta \rangle} (i \langle n, h \rangle)^k$$

Comme ν possède un moment d'ordre 4, la série des différentielles d'ordre inférieur ou égal à 4 converge uniformément (en norme d'opérateur) sur tout compact de \mathbb{R}^d . Par suite, ϕ est C^4 et ses différentielles d'ordre $k \leq 4$ sont données par

$$D_\theta^k \phi(h^{\otimes k}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^3} \nu(n) e^{i \langle n, \theta \rangle} (i \langle n, h \rangle)^k$$

Comme ν est paire on en déduit que $D_0^1 \phi = 0$ et $D_0^3 \phi = 0$ tandis que $D_0^2 = -Q$. D'autre part, comme ν est une mesure de probabilités, on a $\phi(0) = 1$. Si l'on pose $f(\theta) = 1 - \phi(\theta)$, on a $f \in C^4$, avec

$$f(\theta) = \frac{1}{2} Q(\theta) + R(\theta),$$

où pour $0 \leq k < N = 4$

$$D_0^k R = 0.$$

Or $\widehat{\nu^{*k}} = \hat{\nu}^k = \phi^k$, donc

$$\sum_{k=0}^m (\nu^{*k})(n) = \sum_{k=0}^m \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{[-\pi, \pi]^3} e^{-i\langle n, \theta \rangle} \phi(\theta)^k d\theta = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{[-\pi, \pi]^3} e^{-i\langle n, \theta \rangle} \sum_{k=0}^m \phi(\theta)^k d\theta$$

L'inégalité triangulaire montre que $\phi(\theta) = 1$ si et seulement si les nombres complexes $\nu(n)e^{i\langle n, \theta \rangle}$ ont même sens et même direction que 1. Donc si $\phi(\theta) = 1$, les réels de $B = \{\langle n, \theta \rangle, \nu(n) \neq 0\}$ sont tous congrus à zéro modulo 2π . Mais

$$\text{Mod}(B) = \text{Mod}(\langle n, \theta \rangle, n \in M),$$

où

$$M = \text{Mod}(n, \nu(n) \neq 0).$$

Comme la marche aléatoire est irréductible, $M = \mathbb{Z}^d$, d'où

$$\text{Mod}(B) = \text{Mod}(\theta_1, \dots, \theta_d).$$

Donc $\theta_1, \dots, \theta_d \in 2\pi\mathbb{Z}$, ce qui montre que ϕ ne vaut 1 qu'en les points du réseau $(2\pi\mathbb{Z})^d$. De même, il est facile de voir que Q est positive. Si $Q(\theta) = 0$, on a

$$\langle n, \theta \rangle = 0$$

dès que $\nu(n) \neq 0$. Mais

$$\text{Vect}(n, \nu(n) \neq 0) = \text{Vect}(M) = \mathbb{R}^d.$$

θ est orthogonal à \mathbb{R}^d , donc $\theta = 0$ et Q est définie positive. Par suite, comme

$$|e^{-i\langle n, \theta \rangle} \sum_{k=0}^m \phi(\theta)^k| \leq \frac{2}{|1 - \phi(\theta)|},$$

le théorème de convergence dominée s'applique et

$$G(n) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{[-\pi, \pi]^3} e^{-i\langle n, \theta \rangle} \frac{1}{f(\theta)} d\theta$$

Ainsi, G s'interprète comme la covariance d'un système gaussien dont l'interaction J satisfait

$$\hat{J} = f = 1 - \phi(\theta) \tag{2.12}$$

Si \tilde{Q} est la matrice de Q , on peut trouver A symétrique définie positive telle que

$$A^2 = \frac{\tilde{Q}}{2}.$$

Dès lors, on a

$$\frac{Q(x)}{2} = \|Ax\|^2$$

et l'on applique le théorème précédent avec $d_0 = 2$ et $N = 4$. (Comme le théorème que nous appliquons ne permet pas de prendre $d > 3$, nous nous sommes fixés dès le départ $d = 3$, mais les raisonnements faits jusqu'ici ne dépendent en rien de la dimension.)

Comme $\|A^{-1}n\| = \sqrt{2}\langle \tilde{Q}^{-1}n, n \rangle^{\frac{1}{2}}$ et $\det A = 2^{-\frac{d}{2}}(\det Q)^{\frac{1}{2}}$, on obtient les résultats désirés.

■

Remarque : Il faut signaler que les hypothèses de la proposition 2.1 présentée ici comme conséquence du théorème 2.3 ne sont pas minimales : Spitzer montre en effet en [45] que la même conclusion demeure valide si l'on suppose seulement que la marche aléatoire est apériodique, d'espérance nulle, et admet un moment d'ordre deux. Il laisse en exercice au lecteur la généralisation de ce résultat en dimension $d \geq 3$ pour les marches aléatoires qui vérifient en plus

$$\lim_{|n| \rightarrow +\infty} |n|^{d-2} \nu^{*k}(n) = 0, \quad (2.13)$$

ce qui est évidemment vérifié si le support de ν est fini : il obtient

$$G(n) \sim m_d \frac{1}{\det Q^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{\langle n, \tilde{Q}^{-1}n \rangle^{\frac{d}{2}-1}},$$

où m_d est une constante positive ne dépendant que de la dimension. L'équivalent donné est conforme à ce que laisse prévoir le théorème 2.3 avec $d_0 = 2$ si l'on néglige de vérifier l'hypothèse sur N nécessaire pour que son application soit licite.

Exemple : La proposition 2.1 s'applique à la marche aléatoire classique sur \mathbb{Z}^3 , appelée parfois marche de l'ivrogne ; plus précisément ν charge uniquement et de manière équiprobable les déplacements de norme 1. Dans ce cas $Q(\theta) = \frac{1}{3}\|\theta\|^2$, i.e. $\tilde{Q} = \frac{1}{3}\text{Id}$ et $\det Q = \frac{1}{27}$. L'équation (2.12) permet de lui associer un système gaussien en interaction : chaque site interagit avec ses plus proches voisins, de telle sorte que

$$\begin{cases} \Phi_{\{i\}}(\omega) = \frac{1}{2}\omega_i^2 \\ \Phi_{\{i,j\}}(\omega) = -\frac{1}{6}\omega_i\omega_j \text{ si } |i-j| = 1, \text{ et } 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Ce potentiel est appelé potentiel harmonique. On a

$$\hat{J}(e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}, e^{i\theta_3}) = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^3 (1 - \cos \theta_k) \sim \frac{1}{6} \|\theta\|^2$$

et

$$G(n) = c_n \sim \frac{3}{2\pi} \frac{1}{\|n\|}.$$

Remarques :

1. Si l'on revient à une interprétation en termes de covariance de système en interaction quadratique, on a établi une correspondance bijective entre les marches aléatoires symétriques et apériodiques vérifiant

$$\int_{\mathbb{U}} \frac{1}{1 - \phi(z)} dz < +\infty \quad (2.14)$$

correspondent aux potentiels J vérifiant

$$\begin{cases} J(0) = 1 \\ J(k) < 0 \text{ pour } k \neq 0 \\ \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} J(k) = 0 \\ \int_U \frac{1}{\hat{J}(z)} dz < +\infty. \end{cases} \quad (2.15)$$

L'hypothèse selon laquelle \hat{J} ne s'annule qu'en 1 – ou autrement dit, ϕ ne vaut 1 qu'en les points du réseau $(2\pi\mathbb{Z})^d$ – est équivalente à l'apériodicité de la marche aléatoire (cf. [45]), ce qui signifie que le module $M = \text{Mod}(n, \nu(n) \neq 0)$ est \mathbb{Z}^d tout entier. Si l'on y réfléchit bien, cette hypothèse est toute naturelle : si M est un sous-module propre, des sites qui sont dans des classes distinctes de \mathbb{Z}^d/M n'interagissent pas. Le système est alors composé de $[\mathbb{Z}^d : M]$ sous-systèmes indépendants. Il convient alors d'étudier un des sous-systèmes en effectuant un nouveau paramétrage, puisque ces sous-systèmes induisent chacun la même famille de mesures de Gibbs.

2. D'autre part, pour une marche aléatoire symétrique apériodique, la condition (2.14) est équivalente à la transience de la marche aléatoire. En effet, on sait (voir par exemple [45], II.8) qu'une marche aléatoire apériodique sur \mathbb{Z}^d est transiente si et seulement si

$$\int_{\mathbb{U}} \text{Re} \frac{1}{1 - \phi(z)} dz < +\infty \quad (2.16)$$

C'est toujours le cas pour $d \geq 3$.

3. Les correspondances que nous avons établies entre marches aléatoires symétriques apériodiques transientes et certaines interactions gaussiennes demeurent vraies quelle que soit la dimension. Ainsi, pour des potentiels vérifiant (2.15) et correctement paramétrés, on peut obtenir déduire le comportement asymptotique de la fonction de covariance si l'on connaît celui de la fonction de Green de la marche aléatoire correspondante, par exemple si cette dernière vérifie (2.13) (cette dernière condition est, elle, vérifiée par les potentiels à portée finie, en particulier par le potentiel harmonique).

2.2.4 Sur la généralité des résultats précédents

Le théorème qui suit montre que les hypothèses du théorème 2.4 sont effectivement réalisables, au sens qu'on peut toujours trouver un potentiel qui en vérifie les hypothèses, des paramètres convenables ayant été imposés.

Théorème 2.5. *Soit d un entier naturel non nul, $d_0 < d$ et $A \in Gl_d(\mathbb{R})$. On peut construire un potentiel J d -dimensionnel tel que*

$$f(\theta_1, \dots, \theta_d) = \hat{J}(e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_d}).$$

vérifie :

- f ne s'annule qu'en les points du réseau $(2\pi\mathbb{Z})^d$,
- il existe une fonction R de classe C^∞ telle que

$$f(x) = \|Ax\|^{d_0} + R(x),$$

avec R identiquement nul sur un voisinage de zéro

ce qui implique que f vérifie les hypothèses du Théorème 2.4 avec d, d_0 et A déterminés tels qu'on les a choisis.

Preuve : Soit $\phi \in C^\infty([0, +\infty[, [0, 1])$ vérifiant $\phi(x) = 1$ pour $x \leq \frac{1}{2}$ et $\phi(x) = 0$ pour $x \geq 1$. On définit alors $f : [-\pi, \pi]^d \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$f(x) = \phi(x)\|Ax\|^{d_0} + (1 - \phi(x))$$

Si $f(x) = 0$, comme $\phi(x) \in [0, 1]$, on a $\phi(x)\|Ax\|^{d_0} = 0$ et $1 - \phi(x) = 0$ soit $\phi(x) = 1$ et $\|Ax\| = 0$ d'où $x = 0$. D'autre part,

$$R(x) = f(x) - \|Ax\|^{d_0} = (1 - \phi(x))(1 - \|Ax\|^{d_0})$$

est une fonction C^∞ nulle sur un voisinage de 0, donc dont toutes les différentielles sont nulles en zéro. Comme f vaut identiquement 1 sur un voisinage de la

frontière du cube elle admet un prolongement $C^\infty(\mathbb{R}^d \setminus (2\pi\mathbb{Z})^d)$ dont $(2\pi\mathbb{Z})^d$ est un groupe de période. C'est ce prolongement que nous noterons f désormais. Il est clair que f vérifie les hypothèses du théorème 2.3. On définit naturellement J par

$$J(n) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} e^{-i\langle n, \theta \rangle} f(\theta) d\theta$$

Comme f est paire à valeurs réelles, J l'est également. Reste à voir que $J \in A_1$. En appliquant les mêmes raisonnements que lors de la preuve du théorème 2.3, on voit que

$$J(n) = O\left(\frac{1}{\|n\|^{d+d_0}}\right),$$

ce qui prouve que

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}^d} |J(n)| < +\infty.$$

■

2.2.5 Théorème de limite centrale

Nous allons maintenant étudier l'influence de la transition de phase sur le théorème de type limite centrale. En effet, le comportement asymptotiques en loi de sommes normalisées de manière convenable est un résultat extrêmement significatif en théorie des probabilités, plus évocateur que la seule vitesse de décroissance de la covariance.

Théorème 2.6. *Soit d un entier naturel non nul, d_0 un réel vérifiant $\frac{d-1}{2} < d_0 < d$ et $A \in Gl_d(\mathbb{R})$.*

Soit J un potentiel d -dimensionnel. On définit

$$f(\theta_1, \dots, \theta_d) = \hat{J}(e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_d}).$$

On suppose que les hypothèses suivantes sont vérifiées :

- *f ne s'annule qu'en les points du réseau $(2\pi\mathbb{Z})^d$.*
- *il existe une fonction R de classe C^{d+1} telle que*

$$f(x) = \|Ax\|^{d_0} + R(x),$$

avec pour tout k vérifiant $0 \leq k \leq d$:

$$D_0^k R = 0.$$

Alors, si l'on pose $\Lambda_n = \{0, \dots, n-1\}^d$ et

$$S_\Lambda = \sum_{i \in \Lambda} X_i$$

où la loi de $X = (X_i)_{i \in \mathbb{Z}^d}$ est μ , l'unique loi gaussienne centrée de $\mathfrak{G}_{J,0}^\beta$, il existe $\sigma > 0$ tel que l'on a la convergence en loi suivante :

$$\frac{S_{\Lambda_n}}{|\Lambda_n|^{\frac{1}{2} + \frac{d_0}{2d}}} \Longrightarrow \mathcal{N}(0, \sigma^2).$$

Preuve : Comme X est gaussien stationnaire centré, S_{Λ_n} est une variable gaussienne centrée. Pour montrer la convergence en loi annoncée, il suffit donc de montrer que

$$\mathbb{E}_\mu \frac{S_{\Lambda_n}^2}{n^{d+d_0}}$$

a une limite non nulle. Comme dans la preuve du théorème 2.2, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_\mu S_{\Lambda_n}^2 &= \sum_{k,l \in \Lambda_n} c_{k-l} \\ &= \sum_{p \in \{-n, \dots, n\}^d} N_p^n c_p, \end{aligned}$$

avec

$$N_p^n = |\{k, l \in \Lambda_n; k - l = p\}| = \prod_{i=1}^d (n - |p_i|).$$

D'après le théorème 2.3, il existe une constante K – que l'on a calculé explicitement – et un réel δ tels que

$$c_n = K \|A^{-1}n\|^{-\alpha} + O(\|A^{-1}n\|^{-\delta}),$$

avec $\alpha = d - d_0$ et $\delta > \alpha$. On peut supposer $\delta < d$. Si l'on pose $V =]-1, 1[^d$, on a

$$\begin{aligned} \sum_{p \in \{-n, \dots, n\}^d} N_p^n \|A^{-1}p\|^{-\alpha} &= \sum_{p \in nV \cap \mathbb{Z}^d} \prod_{i=1}^d (n - |p_i|) \|A^{-1}p\|^{-\alpha} \\ &= n^{d-\alpha} \sum_{\frac{p}{n} \in V \cap \frac{1}{n}\mathbb{Z}^d} \prod_{i=1}^d (1 - |\frac{p_i}{n}|) \|A^{-1}\frac{p}{n}\|^{-\alpha} \\ &= n^{d-\alpha} \sum_{x \in V \cap \frac{1}{n}\mathbb{Z}^d} \prod_{i=1}^d (1 - |x_i|) \|A^{-1}k\|^{-\alpha} \\ &= n^{d-\alpha} \sum_{x \in V \cap \frac{1}{n}\mathbb{Z}^d} \phi(x), \end{aligned}$$

où l'on a posé

$$\phi(x) = \|A^{-1}x\|^{-\alpha} \prod_{i=1}^d (1 - x_i).$$

On reconnaît ainsi une somme de Riemann, soit

$$\sum_{x \in V \cap \frac{1}{n}\mathbb{Z}^d} \phi(x) \sim \left(\int_V \phi(x) dx \right) n^d$$

On fait de même pour δ , et on a ainsi

$$\mathbb{E}_\mu S_{\Lambda_n}^2 = K \left(\int_V \phi(x) dx \right) n^{2d-\alpha} + O(n^{2d-\delta}),$$

d'où

$$\mathbb{E}_\mu S_{\Lambda_n}^2 \sim K \left(\int_V \phi(x) dx \right) n^{d+d_0},$$

puis

$$\mathbb{E}_\mu \frac{S_{\Lambda_n}^2}{n^{d+d_0}} \rightarrow \sigma^2 = K \left(\int_V \phi(x) dx \right) n^{d+d_0}.$$

■

2.3 Commentaires

Sous des hypothèses peu contraignantes, nous venons d'établir des résultats assez précis sur la vitesse de décroissance de la covariance, qui montrent qu'en cas de transition de phase, on a une décroissance de la covariance en $\frac{1}{\|n\|^{\inf(\alpha, \frac{d+1}{2})}}$, où $\alpha = d - d_0$, d_0 mesurant le degré de dégénérescence de la transition de phase. Cette vitesse contraste fortement avec la décroissance exponentielle usuelle en cas d'absence de transition de phase. Ce résultat n'est pas surprenant : en effet, Laroche a démontré que pour des interactions bornées sommables avec espace d'états fini, la covariance ne peut pas décroître plus vite qu'en $|n|^{-2d}$ (voir [30]) lorsqu'il y a transition de phase. Dans le cas où $d_0 > \frac{d-1}{2}$, on a alors établi que la décroissance de la covariance était si lente que la dimension de la renormalisation nécessaire à l'établissement d'un théorème central limite est différente de celle du cas de variables indépendantes, alors que dans le cas où il n'y avait pas de transition de phase, la renormalisation était classiquement la racine carrée du volume. Nous postulons que la valeur de d_0 est un paramètre important dans l'étude du système que nous étudions. Ce postulat sera étayé ultérieurement par

l'étude du système dynamique se dirigeant vers l'état d'équilibre qui n'est autre qu'une mesure de Gibbs.

Dans cette optique, on doit alors conclure que la vitesse de décroissance de la covariance, bien qu'elle soit un excellent indice de l'existence de transition de phase, ne donne pas une information suffisamment précise sur la nature de la transition de phase puisque dès que $d_0 \leq \frac{d-1}{2}$, elle ne permet pas d'estimer d_0 .

Si l'on ne s'intéresse plus seulement à l'ordre de grandeur de la covariance, mais aussi à son signe, il est intéressant de remarquer que la position de d_0 par rapport à $\frac{d-1}{2}$ détermine la présence ou l'absence de polarisation du système : si $d_0 > \frac{d-1}{2}$, alors $\mathbb{E}_\mu X_0 X_n$ est positif pour $|n|$ assez grand, tandis que si $d_0 < \frac{d-1}{2}$, les covariances sont à l'infini alternativement positives et négatives.

Chapitre 3

Processus de diffusion infini-dimensionnel associé à une interaction quadratique

Jusqu'à présent, nous avons considéré les mesures de Gibbs gaussiennes comme définies par un système de caractéristiques locales – les équations D.L.R. – déterminant les probabilités des différents états d'un sous-volume fini à condition extérieure du système fixée. On parle alors d'un système de spécifications locales.

Il existe une autre approche des mesures de Gibbs, elle aussi conforme à l'intuition physique : il s'agit de considérer ces mesures comme les états d'équilibres – *i.e.* les limites en temps – d'un système différentiel stochastique dans lequel intervient le gradient de l'interaction. Comme l'interaction est quadratique, l'équation différentielle stochastique est linéaire.

Après avoir démontré l'existence et l'unicité de la solution du système différentiel adéquat dans un cadre que nous préciserons, nous nous attacherons particulièrement à étudier la façon dont la limite asymptotique dépend de la condition initiale et montrerons que toutes les mesures de Gibbs peuvent être ainsi obtenues comme mesures d'équilibre.

Nous comparerons nos résultats avec ceux qui existent déjà pour des interactions sous-quadratiques ou quadratiques perturbées : il convient de mentionner le remarquable article pionnier de Doss et Royer (cf. [15]) et les récents travaux dans un cadre général de Da Prato et Zabczyk sur les équations différentielles stochastiques en dimension infinie (cf. [11],[12]). Malheureusement, si l'on veut appliquer ces résultats à des interactions purement quadratiques, il convient de supposer qu'un certain opérateur est accréitif, ce qui nous place automatiquement dans un cadre d'unicité de la mesure de Gibbs dont nous voulons nous libérer.

3.1 L'équation différentielle stochastique

On désigne par W_t une famille $(W_t^i)_{i \in \mathbb{Z}^d}$ de mouvements browniens réels indépendants définis sur un espace probabilisé complet (Ω, F, P) . On munira Ω de la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ où \mathcal{F}_t est la tribu complète engendrée par les W_s^i pour $i \in \mathbb{Z}^d$ et $0 \leq s \leq t$. On étudie ici le système différentiel stochastique

$$X_t^i = \zeta^i + W_t^i - \frac{1}{2} \int_0^t \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} J(i, k) X_s^k ds \quad \forall i \in \mathbb{Z}^d, t \in \mathbb{R}^+ \quad (3.1)$$

où ζ est un vecteur aléatoire indépendant du brownien W_t . On souhaite l'écrire sous la forme vectorielle

$$X_t = \zeta + W_t - \frac{1}{2} \int_0^t J X_s ds, \quad t \in \mathbb{R}^+, \quad (3.2)$$

Pour étudier de manière rigoureuse un système infini d'équations différentielles stochastiques, il est commode de se placer dans un sous-espace de $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$ dans lequel la série figurant au second membre de (3.1) a un sens. On retrouve ici un problème analogue à celui rencontré lors de l'étude de M_h^J : il y a un choix de sous-espace à faire qui n'est pas canonique. Nous ferons quant à nous des choix liés aux espaces étudiés lors du chapitre 1, ce qui ne signifie pas que d'autres options ne sauraient être pertinentes.

Pour résoudre cette équation, on supposera donné un espace de Banach E inclus dans $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$ et vérifiant

Hypothèses sur l'espace d'état $E \subset \mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$ dans lequel la diffusion vit

1. $t \mapsto W_t \in C(\mathbb{R}^+, E)$ P-presque sûrement.
2. Les suites finies sont dans E
On note e_i la suite dont toutes les coordonnées sont nulles excepté la i ième qui vaut 1.
- (\mathcal{H}_0) 3. La forme linéaire π_i qui à chaque vecteur de E associe sa i -ème composante est continue.
4. Le système $(e_i)_{i \in \mathbb{Z}^d}$ est une base faible de Schauder de E , c'est à dire que

$$\forall x \in E, \forall \phi \in E' \quad \lim_{\Lambda \rightarrow \mathbb{Z}^d} \sum_{i \in \Lambda} \pi_i(x) \phi(e_i) = \phi(x) \quad (3.3)$$

Hypothèse sur les coefficients de la diffusion J est un opérateur continu sur E , avec $\pi_j(Je_i) = J(j, i)$.

Définition : On dit que le processus $(X_t)_{t \geq 0}$ est solution de l'équation différentielle stochastique (3.1) si $t \mapsto X_t \in C(\mathbb{R}^+, E)$ P-presque sûrement et si presque toute trajectoire de X vérifie le système intégral (3.1).

Remarque : L'hypothèse (3.3) implique que l'espace vectoriel engendré par les opérateurs de projection $(\pi_i)_{i \in \mathbb{Z}^d}$ est dense dans E' pour la topologie *-faible, puisque cette équation signifie que

$$\phi = \lim_{\Lambda \rightarrow \mathbb{Z}^d} \sum_{i \in \Lambda} \phi(e_i) \pi_i$$

au sens de la topologie *-faible.

Lemme 15. *Lorsque, comme nous l'avons supposé, E admet $(e_i)_{i \in \mathbb{Z}^d}$ comme base faible de Schauder, les solutions de l'équation (3.2) et du système (3.1) coïncident.*

Preuve : Comme, par hypothèse, π_i est continu, on a

$$\pi_i \left(\int_0^t JX_s ds \right) = \int_0^t \pi_i(JX_s) ds.$$

(Pour un exposé des propriétés élémentaires des intégrales à valeurs vectorielles banachiques, on pourra se reporter à [48], ch. VI §3.)

Maintenant, si l'on définit $\phi \in E'$ par $\phi(x) = \pi_j(Jx)$, en appliquant (3.3), on a

$$\pi_j(JX_s) = \sum_{i \in \mathbb{Z}^d} \pi_i(X_s) \pi_j(Je_i) = \sum_{i \in \mathbb{Z}^d} J(j, i) X_s^i$$

Les deux notions sont alors bien équivalentes, puisque l'on a alors

$$\begin{aligned} & \forall j \in \mathbb{Z}^d, \forall t \in \mathbb{R}^+ \\ \pi_j \left(-X_t + \zeta + W_t - \frac{1}{2} \int_0^t JX_s ds \quad \forall t \in \mathbb{R}^+ \right) &= -X_t^j + \zeta^j + W_t^j - \frac{1}{2} \int_0^t \sum_{i \in \mathbb{Z}^d} J(j, i) X_s^i ds. \end{aligned}$$

■

3.2 Existence et unicité de la solution

3.2.1 Un lemme d'analyse

Lemme 16. Soit E un espace de Banach. On se donne $\omega \in C(\mathbb{R}^+, E)$, une application linéaire J continue de E dans lui-même et $\zeta \in E$. L'équation intégrale

$$x(t) = \zeta + \omega(t) - \int_0^t \frac{J}{2} x(s) ds$$

admet une unique solution $x \in C(\mathbb{R}^+, E)$: elle est donnée par

$$x(t) = \exp(-t \frac{J}{2}) \zeta + \omega(t) - \frac{J}{2} \int_0^t \exp(-(t-s) \frac{J}{2}) \omega(s) ds$$

Preuve : Soit $T > 0$. On définit un opérateur \tilde{A} de $C([0, T], E)$ dans lui-même par

$$\forall t \in [0, T] \quad (\tilde{A}x)(t) = \zeta + \omega(t) - \int_0^t \frac{J}{2} x(s) ds$$

On montre par récurrence sur $n \geq 1$.

$$\forall t \in [0, T] \quad \forall x, y \in C([0, T], E) \quad \|\tilde{A}^n x(t) - \tilde{A}^n y(t)\| \leq \frac{(\|\frac{J}{2}\|t)^n}{n!} \|x - y\|_T,$$

où l'on a posé pour $x \in C([0, T], E)$ $\|x\|_T = \sup_{t \in [0, T]} \|x(t)\|$. On en déduit

$$\forall x, y \in C([0, T], E) \quad \|\tilde{A}^n x - \tilde{A}^n y\|_T \leq \frac{(\|\frac{J}{2}\|T)^n}{n!} \|x - y\|_T$$

Pour n assez grand, $\frac{(\|\frac{J}{2}\|T)^n}{n!} < 1$: une des itérées de \tilde{A} est donc contractante : d'après le théorème du point fixe, \tilde{A} admet un unique point fixe :

$$\exists! x \in C([0, T], E) \quad \forall t \in [0, T] \quad x(t) = \zeta + \omega(t) - \int_0^t \frac{J}{2} x(s) ds$$

D'où

$$\exists! x \in C(\mathbb{R}^+, E) \quad \forall t \in \mathbb{R}^+ \quad x(t) = \zeta + \omega(t) - \int_0^t \frac{J}{2} x(s) ds$$

Il reste à vérifier que la solution proposée convient.

$$\int_0^t x(s) ds = \int_0^t \exp(-s \frac{J}{2}) \zeta ds + \int_0^t \omega(s) ds - \int_0^t \frac{J}{2} \exp(-s \frac{J}{2}) \int_0^s \exp(u \frac{J}{2}) \omega(u) du ds$$

Le dernier terme se transforme à l'aide du théorème de Fubini :

$$\begin{aligned}
\int_0^t \frac{J}{2} \exp(-s\frac{J}{2}) \int_0^s \exp(u\frac{J}{2}) \omega(u) du ds &= \int \int_{0 \leq u \leq s \leq t} \frac{J}{2} \exp(-s\frac{J}{2}) \exp(u\frac{J}{2}) \omega(u) du ds \\
&= \int_0^t \left[\int_u^t \frac{J}{2} \exp(-s\frac{J}{2}) ds \right] \exp(u\frac{J}{2}) \omega(u) du \\
&= \int_0^t (\exp(-u\frac{J}{2}) - \exp(-t\frac{J}{2})) \exp(u\frac{J}{2}) \omega(u) du \\
&= \int_0^t \omega(u) du - \int_0^t \exp(-(t-u)\frac{J}{2}) \omega(u) du
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
\frac{J}{2} \int_0^t x(s) ds &= \left[\int_0^t \frac{J}{2} \exp(-s\frac{J}{2}) ds \right] \zeta + \frac{J}{2} \int_0^t \exp(-(t-u)\frac{J}{2}) \omega(u) du \\
&= [I - \exp(-t\frac{J}{2})] \zeta + \frac{J}{2} \int_0^t \exp(-(t-u)\frac{J}{2}) \omega(u) du
\end{aligned}$$

On voit alors aisément que x vérifie bien l'équation proposée.

■

3.2.2 Le théorème d'existence et unicité

Le lemme 16 va alors nous permettre de trouver les solutions du système différentiel stochastique (3.1) vivant dans un espace de Banach $E \subset \mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$ convenablement choisi.

Théorème 3.1. *Supposons que nous sont donnés un espace probabilisé (Ω, \mathcal{F}, P) , une famille $(W^i)_{i \in \mathbb{Z}^d}$ de mouvements browniens indépendants sous la probabilité P , ainsi qu'un espace de Banach E vérifiant l'hypothèse \mathcal{H}_0 . Alors, si J est un opérateur continu sur E et ζ une variable aléatoire à valeurs dans E indépendante des mouvements browniens $(W^i)_{i \in \mathbb{Z}^d}$, on a le résultat suivant : Il existe un processus X_t à trajectoires continues dans E une solution de l'équation de diffusion (3.2). Ce processus est unique à l'indistinguabilité près.*

Il s'écrit

$$X_t(\omega) = e^{-t\frac{J}{2}} \zeta(\omega) + W_t(\omega) - \frac{J}{2} \int_0^t e^{-(t-s)\frac{J}{2}} W_s(\omega) ds$$

X_t est un processus de Markov (\mathcal{F}_t) -adapté.

Preuve : Notons $\Omega_1 = \{\omega : t \mapsto W_t(\omega) \in C(\mathbb{R}^+, E)\}$ Si l'on pose, pour $\omega \in \Omega_1$

$$X_t(\omega) = e^{-t\frac{J}{2}}\zeta(\omega) + W_t(\omega) - \frac{J}{2} \int_0^t e^{-(t-s)\frac{J}{2}} W_s(\omega) ds$$

et $X_t(\omega) = 0$ pour $\omega \in \Omega \setminus \Omega_1$, le processus (X_t) est bien défini et le lemme 16 montre que X_t vérifie bien (sur Ω_1 , donc presque sûrement) les conditions de continuité et l'équation intégrale demandées. Soit (X') une autre solution du problème : posons

$$\Omega_1 = \{\omega : t \mapsto X'_t(\omega) \in C(\mathbb{R}^+, E) \text{ et } X_t = \zeta + W_t - \int_0^t \frac{J}{2} X_s ds \quad \forall t \in \mathbb{R}^+\}.$$

D'après l'unicité du lemme 16, $t \mapsto X_t(\omega)$ et $t \mapsto X'_t(\omega)$ coïncident pour $\omega \in \Omega_1 \cap \Omega_2$. Comme $P(\Omega_1 \cap \Omega_2) = 1$, les deux processus sont indistinguables.

■

Remarque : Notre approche des données du problème est sensiblement différente de celle adoptée par Doss et Royer dans [15] : ces derniers ont fait le choix, un potentiel leur étant donné, de construire un espace $E = l^2(\rho)$ dans lequel leur solution va évoluer. Nous avons fait le choix, quant à nous, de nous fixer un espace E décrit explicitement, ce qui impose alors des conditions sur J . Si l'on applique les résultats de Doss et Royer à un potentiel quadratique –ils étudient, eux, une classe plus générale de potentiels –, il convient de supposer que J est de portée finie ou s'écrit $J(n) = \phi(|n|)$, où ϕ est une fonction décroissante. Notons que leur article ne s'occupe pas du comportement asymptotique du système, mais étudie avec soin les liens entre mesures de Gibbs et solutions réversibles du système sous des hypothèses supplémentaires qui s'écrivent, dans le cas linéaire qui nous intéresse,

$$J(0) > \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \max(0, -J(k)).$$

Il pourra être intéressant d'étudier ultérieurement comment on peut s'affranchir de cette hypothèse – qui écarte par exemple le modèle harmonique.

3.3 Covariance de la diffusion

Nous avons pu montrer l'existence et l'unicité d'une solution à l'équation différentielle (3.1) sans faire aucune hypothèse de moment. Cependant dans ce qui suit, afin d'étudier les propriétés asymptotiques du système, il sera

commode de pouvoir définir des opérateurs de covariance associés au processus sans qu'il y ait à débattre de leur domaine de définition. Dans toute cette section, on supposera donc vérifiée l'hypothèse

$$\mathbb{E}(\|W_1\|_E^2) < +\infty. \quad (3.4)$$

Cette hypothèse n'est pas très contraignante et nous épargne des discussions.

Définition : Si X et Y sont deux variables aléatoires sur E dont la norme admet un moment d'ordre 2, alors on peut définir une forme quadratique continue sur $E' \times E'$, où E' est muni de la topologie *-faible.

$$(\phi, \psi) \in E' \times E' \mapsto C_{X,Y}(\phi, \psi) = \mathbb{E}\phi(X)\psi(Y).$$

On l'appelle la covariance de X et Y .

Preuve :

$$|\phi(X)\psi(Y)| \leq \|\phi\| \|\psi\| \|X\| \|Y\| \quad (3.5)$$

Or $\|X\| \|Y\| \in L^1$, puisque $\|X\|, \|Y\| \in L^2$, donc $C_{X,Y}$ est bien définie. Si (ϕ_n) et (ψ_n) tendent faiblement vers ϕ et ψ , alors $(\|\phi_n\|)_n$ et $(\|\psi_n\|)_n$ sont bornées. et l'on a $\phi_n(X)\psi_n(X) \rightarrow \phi(X)\psi(X)$ p.s. . En appliquant l'inégalité (3.5) et le théorème de convergence dominée, on obtient la continuité de

$$(\phi, \psi) \in E' \times E' \mapsto C_{X,Y}(\phi, \psi) = \mathbb{E}\phi(X)\psi(Y)$$

pour la topologie *-faible.

■

Dans toute cette section, on notera

$$\langle \cdot, \cdot \rangle = C_{W_1, W_1}.$$

On a

$$\langle \pi_i, \pi_j \rangle = \mathbb{E}W_1^i W_1^j = \delta_j^i = \pi_i(e_j) = \pi_j(e_i)$$

Comme l'espace vectoriel engendré par les π_j est dense dans E' pour la topologie *-faible, on en déduit par continuité

$$\forall i \in \mathbb{Z}^d \quad \forall \phi \in E' \quad \langle \pi_i, \phi \rangle = \phi(e_i)$$

De même, il est alors facile de voir que

$$\forall s, t \geq 0 \quad C_{W_s, W_t} = \inf(s, t) \langle \cdot, \cdot \rangle.$$

Si $J \in L(E, E)$ et $\phi \in E'$, on définit $J.\phi \in E'$ par

$$\forall x \in E \quad (J.\phi)(x) = \phi(Jx).$$

On dit que J est auto-adjoint lorsque

$$\forall \phi, \psi \in E' \quad \langle J.\phi, \psi \rangle = \langle \phi, J.\psi \rangle.$$

Proposition 3.1. *Si J est auto-adjoint et que $(X_t)_{t \geq 0}$ est la solution de l'e.d.s. (3.1) à condition initiale nulle, alors pour tout $t \geq 0$, on a*

$$\forall \phi, \psi \in E' \quad C_{X_t, X_t}(\phi, \psi) = \langle V_t \cdot \phi, \psi \rangle,$$

où à l'instant t , l'opérateur de covariance V_t vaut

$$V_t = \int_0^t \exp(-sJ) ds.$$

Preuve : On a

$$X_t = W_t - \int_0^t \frac{J}{2} e^{-(t-s)\frac{J}{2}} W_s ds$$

Soit $\phi, \psi \in E'$: la linéarité et la continuité donnent

$$\phi(X_t) = \phi(W_t) - \int_0^t \phi\left(\frac{J}{2} e^{-(t-s)\frac{J}{2}} W_s\right) ds$$

ou encore

$$\phi(X_t) = \phi(W_t) - \int_0^t \left(\frac{J}{2} e^{-(t-s)\frac{J}{2}} \cdot \phi\right)(W_s) ds.$$

De même

$$\psi(X_t) = \psi(W_t) - \int_0^t \left(\frac{J}{2} e^{-(t-u)\frac{J}{2}} \cdot \psi\right)(W_u) ds.$$

On en déduit

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\phi(X_t)\psi(X_t) &= \mathbb{E}\phi(W_t)\psi(W_t) \\ &- \mathbb{E} \int_0^t \left(\frac{J}{2} e^{-(t-s)\frac{J}{2}} \cdot \phi\right)(W_s)\psi(W_t) ds \\ &- \mathbb{E} \int_0^t \left(\frac{J}{2} e^{-(t-u)\frac{J}{2}} \cdot \psi\right)(W_u)\phi(W_t) du \\ &+ \mathbb{E} \int_0^t \left(\frac{J}{2} e^{-(t-s)\frac{J}{2}} \cdot \phi\right)(W_s) ds \int_0^t \left(\frac{J}{2} e^{-(t-u)\frac{J}{2}} \cdot \psi\right)(W_u) du \end{aligned}$$

En appliquant le théorème de Fubini, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\phi(X_t)\psi(X_t) &= \mathbb{E}\phi(W_t)\psi(W_t) \\ &- \int_0^t \mathbb{E}\left(\frac{J}{2} e^{-(t-s)\frac{J}{2}} \cdot \phi\right)(W_s)\psi(W_t) ds \\ &- \int_0^t \mathbb{E}\left(\frac{J}{2} e^{-(t-u)\frac{J}{2}} \cdot \psi\right)(W_u)\phi(W_t) du \\ &+ \int_{[0,t] \times [0,t]} \mathbb{E}\left(\frac{J}{2} e^{-(t-s)\frac{J}{2}} \cdot \phi\right)(W_s)\left(\frac{J}{2} e^{-(t-u)\frac{J}{2}} \cdot \psi\right)(W_u) du ds \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\phi(X_t)\psi(X_t) &= t\langle\phi, \psi\rangle \\
&- \int_0^t s \left\langle \frac{J}{2} e^{-(t-s)\frac{J}{2}} \cdot \phi, \psi \right\rangle ds \\
&- \int_0^t u \left\langle \frac{J}{2} e^{-(t-u)\frac{J}{2}} \cdot \psi, \phi \right\rangle du \\
&+ \int_{[0,t] \times [0,t]} \inf(s, u) \left\langle \frac{J}{2} e^{-(t-s)\frac{J}{2}} \cdot \phi, \frac{J}{2} e^{-(t-u)\frac{J}{2}} \cdot \psi \right\rangle du ds
\end{aligned}$$

Comme J est auto-adjoint, l'expression se simplifie en

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\phi(X_t)\psi(X_t) &= t\langle\phi, \psi\rangle \\
&- 2 \int_0^t s \left\langle \frac{J}{2} e^{-(t-s)\frac{J}{2}} \cdot \phi, \psi \right\rangle ds \\
&+ \int_{[0,t] \times [0,t]} \inf(s, u) \left\langle \left(\frac{J}{2}\right)^2 e^{-((t-s)+(t-u))\frac{J}{2}} \cdot \phi, \psi \right\rangle du ds
\end{aligned}$$

En utilisant la linéarité de l'intégrale, on a alors

$$C_{X_t, X_t}(\phi, \psi) = \langle V_t \cdot \phi, \psi \rangle,$$

avec

$$V_t = tI - 2 \int_0^t s \frac{J}{2} e^{-(t-s)\frac{J}{2}} ds + \int_{[0,t] \times [0,t]} \inf(s, u) \left(\frac{J}{2}\right)^2 e^{-((t-s)+(t-u))\frac{J}{2}} du ds.$$

Un changement de variable, puis une intégration par parties donnent

$$\int_0^t s \frac{J}{2} e^{-(t-s)\frac{J}{2}} ds = \int_0^t (t-s) \frac{J}{2} e^{-s\frac{J}{2}} ds = tI - \int_0^t e^{-s\frac{J}{2}} ds. \quad (3.6)$$

Par symétrie, on a

$$\int_{[0,t] \times [0,t]} \inf(s, u) \left(\frac{J}{2}\right)^2 e^{-((t-s)+(t-u))\frac{J}{2}} du ds = 2 \int_{0 \leq u \leq s \leq t} u \left(\frac{J}{2}\right)^2 e^{-((t-s)+(t-u))\frac{J}{2}} du ds.$$

On écrit

$$u \left(\frac{J}{2}\right)^2 e^{-((t-s)+(t-u))\frac{J}{2}} = \frac{J}{2} e^{-(t-s)J} u \frac{J}{2} e^{-(s-u)\frac{J}{2}}$$

Si on intègre en u de 0 à s , on trouve, d'après le calcul fait en (3.6)

$$\frac{J}{2} e^{-2(t-s)\frac{J}{2}} (sI - \int_0^s e^{-u\frac{J}{2}} du) = s \frac{J}{2} e^{-2(t-s)\frac{J}{2}} - e^{-2(t-s)\frac{J}{2}} (I - e^{-s\frac{J}{2}})$$

On intègre maintenant en s de 0 à t en remplaçant s par $t - s$: le résultat de l'intégration est, en appliquant (3.6) à $2\frac{J}{2}$:

$$\frac{1}{2}(tI - \int_0^t e^{-sJ}) - \int_0^t e^{-sJ} ds - e^{-t\frac{J}{2}} \int_0^t e^{-(t-s)\frac{J}{2}} ds$$

Il reste à calculer

$$e^{-t\frac{J}{2}} \int_0^t e^{-(t-s)\frac{J}{2}} ds = e^{-t\frac{J}{2}} \int_0^t e^{-s\frac{J}{2}} ds$$

Posons $Z(t) = \int_0^t e^{-s\frac{J}{2}} ds$ et calculons $\int_0^t e^{-sJ} ds$ par une intégration par parties :

$$\begin{aligned} \int_0^t e^{-sJ} ds &= [e^{-s\frac{J}{2}} Z(s)]_0^t + \int_0^t Z(s) J e^{-s\frac{J}{2}} ds \\ &= e^{-t\frac{J}{2}} Z(t) + \int_0^t (I - e^{-s\frac{J}{2}}) e^{-s\frac{J}{2}} ds \\ &= e^{-t\frac{J}{2}} Z(t) + Z(t) - \int_0^t e^{-sJ} ds \end{aligned}$$

On a donc

$$e^{-t\frac{J}{2}} Z(t) = -Z(t) + 2 \int_0^t e^{-sJ} ds,$$

soit

$$e^{-t\frac{J}{2}} \int_0^t e^{-s\frac{J}{2}} ds = - \int_0^t e^{-s\frac{J}{2}} ds + 2 \int_0^t e^{-sJ} ds.$$

On recolle les morceaux :

$$\int_{[0,t] \times [0,t]} \inf(s, u) \left(\frac{J}{2}\right)^2 e^{-((t-s)+(t-u))\frac{J}{2}} du ds = tI - \int_0^t e^{-sJ} ds - 2 \int_0^t e^{-s\frac{J}{2}} ds,$$

et finalement

$$V_t = \int_0^t \exp(-sJ) ds.$$

■

Corollaire 3.1. *Soit*

$$T_E = \{ \tilde{J} \in L(E), \exists J \in A_1 \quad J \text{ paire et } \forall i, j \in \mathbb{Z}^d \tilde{J}(i, j) = J(i - j) \}$$

On suppose que T_E s'injecte continûment dans A_1 . Alors, pour $\tilde{J} \in T_E$, et pour tout $t \geq 0$, X_t admet

$$\int_0^t \exp(-s\hat{J}) ds \tag{3.7}$$

comme densité spectrale.

Preuve : On commence par remarquer que si $C_{Y,Y}(\phi, \psi) = \langle W.\phi, \psi \rangle$ avec $B \in T_E$, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}Y_i Y_j &= C_{Y,Y}(\pi_i, \pi_j) = \langle B.\pi_i, \pi_j \rangle = (B.\pi_i)(e_j) \\ &= \pi_i(Be_j) = B(i, j) = b(i - j) \\ &= \int_{\mathbb{U}} \hat{b}(z) dz \end{aligned}$$

Comme l'injection de T_E dans A_1 est un morphisme d'algèbres continu, le résultat s'ensuit. ■

3.4 Exemples d'espaces d'état E convenables

3.4.1 L'espace $B_{p,0}$

Soit $B_p = \{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}, \|x\|_{B_p} = \sup_{i \in \mathbb{Z}^d} \frac{|x_i|}{p_i} < +\infty\}$, où p est une suite à termes strictement positifs vérifiant l'hypothèse suivante :

$$p_n \gg \sqrt{\ln |n|}. \quad (3.8)$$

Remarque : La condition (3.8) implique

$$\forall c > 0 \quad \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} \exp(-cp_n^2) < +\infty. \quad (3.9)$$

En effet, d'après (3.8), pour $|n|$ assez grand, on a $cp_n^2 \geq (d+1) \ln |n|$, soit $\exp(-cp_n^2) \leq \frac{1}{|n|^{d+1}}$, qui est le terme général d'une série convergente.

En fait (3.8) et (3.9) sont presque équivalentes :

Lemme 17. *Si il existe une fonction croissante ϕ telle que $p_n = \phi(|n|)$, alors (3.9) entraîne (3.8).*

Preuve : Soit $c > 0$. Posons

$$S_c = \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} \exp(-cp_n^2).$$

On a

$$S_c = \sum_{n \geq 0} C_n \exp(-c\phi(n)^2),$$

où $C_n = \text{Card}\{k \in \mathbb{Z}^d, |k| = n\}$. Comme $\forall n \geq 0 \quad C_n \geq 1$, on a

$$\sum_{n \geq 0} \exp(-c\phi(n)^2) \leq S_c$$

Mais la croissance de ϕ implique

$$\frac{n}{2} \exp(-c\phi(n)^2) \leq \sum_{k=E[\frac{n}{2}]}^n \exp(-c\phi(k)^2) \leq S_c$$

On a donc pour tout $n \geq 2$

$$\frac{\phi(n)^2}{\ln n} \geq \frac{1}{c} - \frac{\ln 2S_c}{c \ln n}$$

D'où

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\phi(n)^2}{\ln n} \geq \frac{1}{c}$$

Comme cette inégalité est vraie pour tout $c > 0$, ceci entraîne

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\phi(n)^2}{\ln n} \geq +\infty,$$

d'où (3.8).

■

On note

$$B_{p,0} = \{x \in B_p, \lim_{|i| \rightarrow +\infty} \frac{|x_i|}{p_i} = 0\}.$$

B_p est un espace de Banach dont $B_{p,0}$ est un sous-espace fermé. On a, pour tout $x \in B_{p,0}$, $T_\Lambda x \rightarrow x$ quand $\Lambda \rightarrow \mathbb{Z}^d$, où

$$T_\Lambda x = \sum_{k \in \Lambda} \pi_k(x) e_k. \quad (3.10)$$

Ce qui est évidemment plus fort que (3.3). De plus, (3.10) implique que $B_{p,0}$ est séparable.

Nous allons maintenant montrer quelques propriétés de l'espace $B_{p,0}$: nous allons d'abord montrer que $B_{p,0}$ vérifie les hypothèses \mathcal{H}_0 et l'hypothèse d'intégrabilité (3.4).

Lemme 18. *On a $t \mapsto W_t \in C(\mathbb{R}^+, B_{p,0})$ P -presque sûrement.*

Preuve : Soit Λ_n une suite croissante de parties de \mathbb{Z}^d telle que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \uparrow \Lambda_n = \mathbb{Z}^d.$$

On note ${}^n B$ le processus défini par ${}^n W^i = W^i$ si $i \in \Lambda_n$, 0 sinon. ${}^n W_t$ est un processus à valeurs dans un espace vectoriel de dimension finie et ses coordonnées sont presque sûrement continues, puisque ce sont des mouvements

browniens. Donc pour tout $n, t \mapsto {}^n W_t \in C(\mathbb{R}^+, B_{p,0})$ P presque sûrement. Si l'on montre que pour P presque tout ω , ${}^n W_t(\omega)$ tend uniformément sur tout compact vers $W_t(\omega)$, le résultat sera démontré. Il suffit donc de montrer que $P(\cap_{p \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{Q}_+^+} R_{s,q}) = 1$, où

$$R_{s,q} = \{\omega : \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in [0,s]} \|{}^n W_t - W_t\| \leq q\}.$$

Or

$$\sup_{t \in [0,s]} \|{}^n W_t - W_t\| = \sup_{t \in [0,s]} \sup_{i \notin \Lambda_n} \frac{|W_t^i|}{p_i} = \sup_{i \notin \Lambda_n} \frac{S_s^i}{p_i},$$

où $S_s^i = \sup_{t \in [0,s]} |W_t^i|$. On en déduit que le complémentaire de $R_{s,q}$ est

$$C_{p,q} = \{\omega : S_s^i > qp_i \text{ pour une infinité de } i\}.$$

Mais, d'après la classique inégalité exponentielle du mouvement brownien (cf. par exemple [37], p. 52), on a

$$P(S_s^i > qp_i) \leq 2 \exp\left(-\frac{(qp_i)^2}{2p}\right),$$

qui, comme on l'a vu en (3.9), est le terme général d'une série convergente : on a donc $\sum_i P(S_s^i > qp_i) < +\infty$ et d'après le lemme de Borel-Cantelli $P(C_{p,q}) = 0$. Le résultat s'ensuit.

■

Lemme 19. *Soit $q \geq 1$: il existe une constante M_q , telle que, pour tout $\sigma \geq 0$ et pour toute famille $X = (X_n)_{n \in \mathbb{Z}^d}$ de variables aléatoires gaussiennes centrées vérifiant $\forall n \in \mathbb{Z}^d \mathbb{E}X_n^2 \leq \sigma^2$, on ait*

$$\mathbb{E}\|X\|_{B_p}^q < M_q \sigma^q. \quad (3.11)$$

Preuve : On a

$$\mathbb{E}\|X\|_{B_p}^q = \int_0^{+\infty} q t^{q-1} P(\|X\|_{B_p} > t) dt.$$

En coupant l'intégrale à $t = \sigma$, on en déduit :

$$\mathbb{E}\|X\|_{B_p}^q \leq \sigma^q + \int_\sigma^{+\infty} q t^{q-1} P(\|X\|_{B_p} > t) dt.$$

Et, après un changement de variables

$$\mathbb{E}\|X\|_{B_p}^q \leq \sigma^q \left(1 + \int_1^{+\infty} q t^{q-1} P(\|X\|_{B_p} > \sigma t) dt\right).$$

On a

$$P(\|X\|_{B_p} > \sigma t) = P(\cup_{n \in \mathbb{Z}^d} \{|X_n| > tp_n \sigma\}) \leq \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} P(|X_n| > tp_n \sigma).$$

Or $P(|X_n| > tp_n \sigma) \leq \frac{2}{\sqrt{2\pi}tp_n} \exp(-\frac{(tp_n)^2}{2})$. Il suffit donc de montrer que

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \frac{1}{p_n} \int_1^{+\infty} t^{q-2} \exp(-\frac{(tp_n)^2}{2}) dt < +\infty.$$

Mais si l'on pose $m = \min_{n \in \mathbb{Z}^d} p_n$, on a

$$\int_1^{+\infty} t^{q-2} \exp(-\frac{(tp_n)^2}{2}) dt \leq (\int_1^{+\infty} t^{q-2} \exp(-\frac{(tm)^2}{4}) dt) \exp(-\frac{(tp_n)^2}{4})$$

Comme l'hypothèse (3.9) entraîne la convergence de la série

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}^d} \frac{1}{p_n} \exp(-\frac{(tp_n)^2}{4}),$$

la preuve est achevée.

■

Lemme 20. $\mathbb{E}\|W_1\|_{B_p}^2 < +\infty$

Preuve : Il suffit d'appliquer le lemme 19 avec $\sigma = 1$ et $q = 2$.

■

Nous allons à présent établir un critère de tension dans $\mathcal{P}(B_p)$ pour des variables gaussiennes.

Lemme 21. *On pose, pour $\sigma_0 > 0$:*

$$\mathcal{P}_{\sigma_0} = \{\mu \in \mathcal{P}(B_p) | \forall n \in \mathbb{Z}^d \quad \mu_n \sim \mathcal{N}(0, a_n^2) \text{ et } a_n^2 \leq \sigma_0^2\}.$$

\mathcal{P}_{σ_0} est l'ensemble des probabilités sur B_p dont chaque coordonnée suit une loi gaussienne de variance bornée par σ_0 . Alors, \mathcal{P}_{σ_0} est tendu dans l'ensemble des probabilités sur B_p .

Preuve : On note ε_n une suite réelle vérifiant pour n assez grand

$$\sqrt{\ln |n|} = \varepsilon_n p_n.$$

Soit $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\phi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| < 1 \\ |x| & \text{sinon} \end{cases}$$

On introduit la fonction de contrôle $\Psi : \mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d} \rightarrow \overline{\mathbb{R}^+}$ définie par

$$\Psi(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} \phi\left(\frac{x_n}{p_n \varepsilon_n^{1/2}}\right).$$

On va montrer successivement

1. Pour tout $M > 0$ $\Psi^{-1}([0, M])$ est relativement compact dans B_p .
2. Il existe $K_{\sigma_0} > 0$ tel que pour tout $\mu \in \mathcal{P}_{\sigma_0}$ $\int \Psi d\mu \leq K_{\sigma_0}$.

Démontrons le premier point. Comme la somme de nombres positifs majore tous les termes, il est clair que $\Psi^{-1}([0, M])$ est inclus dans

$$\left\{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d} \forall n \in \mathbb{Z}^d \phi\left(\frac{x_n}{p_n \varepsilon_n^{1/2}}\right) \leq M\right\}$$

Par définition de ϕ , cet ensemble est lui-même inclus dans

$$\left\{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d} \forall n \in \mathbb{Z}^d \frac{x_n}{p_n \varepsilon_n^{1/2}} \leq \max(1, M)\right\}$$

Ce dernier ensemble est un compact de B_p , car $\lim_{|n| \rightarrow \infty} \varepsilon_n^{1/2} = 0$.

Passons au second point. Si l'on note N_σ la mesure sur \mathbb{R} gaussienne centrée et de variance σ^2 , on vérifie aisément que

$$\int_{\mathbb{R}} \phi dN_\sigma = \frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}}.$$

Soit maintenant $\mu \in \mathcal{P}_{\sigma_0}$: d'après le calcul qui précède

$$\int \Psi d\mu \leq \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} \frac{a_n}{p_n \varepsilon_n^{1/2}} \exp\left(-\frac{p_n^2 \varepsilon_n}{2a_n^2}\right)$$

Et donc

$$\int \Psi d\mu \leq \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} \frac{\sigma_0}{p_n \varepsilon_n^{1/2}} \exp\left(-\frac{p_n^2 \varepsilon_n}{2\sigma_0^2}\right) = K_{\sigma_0}.$$

(En effet la série est convergente car $p_n \varepsilon_n^{1/2}$ tend vers $+\infty$ donc $\frac{1}{p_n \varepsilon_n^{1/2}}$ est bornée et pour $|n|$ assez grand $\frac{p_n^2 \varepsilon_n}{2\sigma_0^2}$ est plus grand que $(d+1) \ln |n|$.)

La fin de la preuve est classique : soit $\varepsilon > 0$. On choisit $M > 0$ tel que $\frac{K_{\sigma_0}}{M} < \varepsilon$. $\Psi^{-1}([0, M])$ est relativement compact dans B_p et, d'après l'inégalité de Markov

$$\forall \mu \in \mathcal{P}_{\sigma_0} \quad \mu(\Psi^{-1}([0, M])) \geq 1 - \frac{\int \Psi d\mu}{M} \geq 1 - \frac{K_{\sigma_0}}{M} \geq 1 - \varepsilon.$$

\mathcal{P}_{σ_0} est donc tendu. ■

L'espace $B_{p,0}$ est un sous-espace fermé de B_p : c'est donc un espace de Banach. On a vu que $B_{p,0}$ vérifiait les hypothèses \mathcal{H}_0 et (3.4).

Nous allons maintenant voir que si l'on choisit convenablement le poids p , il est possible de calculer de manière explicite la norme d'opérateur de J .

Lemme 22. *Si p est un poids de classe \mathcal{E} et que $J \in A_p$ est une suite paire, alors J induit un opérateur \tilde{J} sur B_p défini par $\tilde{J}(i, j) = J(i - j)$. J laisse $B_{p,0}$ stable et*

$$\|\tilde{J}\|_{L(B_p)} = \|\tilde{J}\|_{L(B_{p,0})} = \|J\|_{A_p}.$$

Preuve : Pour $x \in B_p$

$$(\tilde{J}x)_n = \sum_k \tilde{J}(n, k)x_k = \sum_n J(n - k)x_k$$

Donc

$$|(\tilde{J}x)_n| \leq \|x\|_{B_p} \sum_k |J(k-n)|p_k \leq \|x\|_{B_p} \sum_k |J(k-n)|p_{k-n}p_n \leq \|x\|_{B_p} \|J\|_{A_p} p_n$$

D'où

$$\|\tilde{J}\|_{L(B_p)} \leq \|J\|_{A_p}$$

Montrons que $B_{p,0}$ est stable par A : soit $x \in B_{p,0}$ et $\varepsilon > 0$

$$\frac{|(\tilde{J}x)_n|}{p_n} \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} |J(k-n)|p_{k-n} \frac{x_k}{p_k} \leq \|x\| \sum_{|k| \leq M} |J(k-n)|p_{k-n} + \|J\|_{A_p} \sup_{|k| \geq M} \frac{x_k}{p_k}$$

On choisit $M > 0$ tel que $\|J\|_{A_p} \sup_{|k| \geq M} \frac{x_k}{p_k} < \frac{\varepsilon}{2}$, puis ensuite il ne reste qu'une somme finie qui est inférieure à $\frac{\varepsilon}{2}$ pour $|n|$ assez grand. Donc $\tilde{J}x \in B_{p,0}$.

Soit $\varepsilon > 0$: il existe M tel que $\sum_{|k| \leq M} p_k |J(k)| \geq \|J\|_{A_p} - \varepsilon$ Posons

$$x_n = \begin{cases} p_n \frac{J(n)}{|J(n)|} & \text{si } |n| \leq M \text{ et } J(n) \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On a $x \in B_{p,0}$ et $\|x\|_{B_p} \leq 1$, donc

$$\|\tilde{J}\|_{L(B_{p,0})} \geq \|\tilde{J}x\|_{B_p} \geq \frac{(\tilde{J}x)_0}{p_0} = (Jx)_0 \geq \|J\|_{A_p} - \varepsilon$$

On en déduit $\|J\|_{L(B_{p,0})} \geq \|J\|_{A_p}$, d'où l'égalité désirée. ■

3.4.2 Les espaces ℓ^p pondérés

Soit $\ell^p(\gamma) = \{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}, \|x\|_{\ell^p(\gamma)}^p = \sum_{i \in \mathbb{Z}^d} \gamma_i |x_i|^p < +\infty\}$, où γ est une suite sommable à termes strictement positifs. $\ell^p(\gamma)$ est un espace de Banach. On a, pour tout $x \in \ell^p(\gamma)$, $T_\Lambda x \rightarrow x$ quand $\Lambda \rightarrow \mathbb{Z}^d$, où

$$T_\Lambda x = \sum_{k \in \Lambda} \pi_k(x) e_k. \quad (3.12)$$

Ce qui est évidemment plus fort que (3.3).

Lemme 23. *On a $t \rightarrow W_t \in C(\mathbb{R}^+, \ell^p(\gamma))$ P -presque sûrement.*

Preuve : Soit Λ_n une suite croissante de parties de \mathbb{Z}^d telle que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \uparrow \Lambda_n = \mathbb{Z}^d.$$

Si l'on pose $r_n = \sum_{n \in \mathbb{Z}^d \setminus \Lambda_n} \gamma_n$, on sait que r_n tend vers zéro car γ est sommable. On peut alors en extraire une sous-suite r_{n_k} telle que $r_{n_{k+1}} \leq \frac{1}{2} r_{n_k}$, ce qui implique que $\sum_{n \geq 0} r_{n_k} < +\infty$. Quitte à remplacer Λ_n par Λ_{n_k} , nous pouvons donc supposer que

$$\sum_{n \geq 0} r_n < +\infty.$$

On répète alors la preuve donnée au lemme 18 : avec les mêmes notations, le complémentaire de $R_{s,q}$ est l'événement

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sup_{t \in [0,s]} \|{}^n W_t - W_t\| > q \right\}.$$

On a

$$\begin{aligned} \left(\sup_{t \in [0,s]} \|{}^n W_t - W_t\| \right)^p &= \sup_{t \in [0,s]} \|{}^n W_t - W_t\|^p \\ &= \sup_{t \in [0,s]} \sum_{i \notin \Lambda_n} \gamma_i |W_i|^p \\ &\leq \sum_{i \notin \Lambda_n} \gamma_i (S_s^i)^p \end{aligned}$$

D'après l'inégalité L^p de Doob (cf. par exemple [37], p.52), on a

$$\mathbb{E}(S_s^i)^p \leq \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-p} \sup_{t \in [0,s]} \mathbb{E}|W_t^i|^p$$

Mais

$$\mathbb{E}|W_t^i|^p = \kappa_p t^p,$$

d'où

$$\mathbb{E}(\sup_{t \in [0, s]} \|{}^n W_t - W_t\|)^p \leq \kappa'_p s^p r_n$$

D'où, d'après l'inégalité de Markov :

$$P(\{\sup_{t \in [0, s]} \|{}^n W_t - W_t\| > q\}) \leq \kappa'_p \left(\frac{s}{q}\right)^p r_n$$

D'après le lemme de Borel-Cantelli,

$$P(\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \{\sup_{t \in [0, s]} \|{}^n W_t - W_t\| > q\}) = 0,$$

ce qui achève la preuve.

■

Lemme 24. *Dans l'espace $\ell^p(\gamma)$, l'hypothèse d'intégrabilité*

$$\mathbb{E}\|W_1\|_{\ell^p(\gamma)}^2 < +\infty$$

est vérifiée.

Preuve : On va en fait montrer le résultat plus fort suivant : si $(X_i)_{i \in \mathbb{Z}^d}$ est une suite de variables aléatoires de même loi possédant un moment d'ordre $\max(p, q)$, alors $\|X\|_{\ell^p(\gamma)} \in L^q$.

On peut supposer sans perte de généralité que $\sum_{i \in \mathbb{Z}^d} \gamma_i = 1$. Posons

$$Z_p = \|X\|_{\ell^p(\gamma)} = \left(\sum \gamma_i |X_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Il est facile de voir que

$$\mathbb{E}(Z_p)^p = \mathbb{E} \sum_{i \in \mathbb{Z}^d} \gamma_i |X_i|^p = \mathbb{E}|X_0|^p < +\infty$$

Donc $Z_p \in L^p$, et de même $Z_q \in L^q$. Mais, d'après l'inégalité de Hölder, on a

$$p \leq q \implies Z_p \leq Z_q.$$

Donc si $p \leq q$, par domination $Z_p \in L^q$ puisque l'on sait que $Z_q \in L^q$. D'un autre côté, si $p \geq q$, on sait que $Z^p \in L^p$, ce qui implique $Z^p \in L^q$.

Comme les coordonnées de W_1 suivent des lois normales centrées réduites, et donc admettent des moments de tous ordres, le résultat s'ensuit.

■

3.5 Comportement asymptotique en temps

Les équations différentielles stochastiques linéaires infini-dimensionnelles sont étudiées en détail dans le traité de Da Prato et Zabczyk [11], mais les résultats asymptotiques qu'ils obtiennent supposent une hypothèse d'accrétivité d'un opérateur qui implique l'unicité de la mesure de Gibbs. L'obtention de résultats fins en présence de transition de phase demande une bonne connaissance de l'opérateur associé à l'équation différentielle stochastique – en particulier la connaissance de son spectre – ce qui suppose un choix judicieux de l'espace dans lequel on veut que les solutions vivent, ce qui disqualifie automatiquement les espaces ℓ^2 à poids : en effet, dans de tels espace, la symétrie de l'opérateur est perdue, ce qui anéantit nos espoirs de déterminer son spectre. En effet, les interactions quadratiques considérées sont associées à un opérateur de Toeplitz symétrique sur ℓ^2 – sans poids, cette fois –, mais ℓ^2 n'est pas un espace assez gros pour que l'on puisse y faire vivre la solution – en particulier un produit de mouvement browniens n'y est presque jamais. Les arguments que nous venons de développer semblent indiquer que le choix des espaces B_p est judicieux. Kondratiev et Sokol ont fait quant à eux le choix de l'espace des suites tempérées et y donnent les premiers résultats en cas de transition de phase. Nous reviendrons sur leurs travaux dans une remarque ultérieure.

Nous allons maintenant établir quelques lemmes techniques qui nous seront utiles dans l'étude du comportement asymptotique.

3.5.1 Métrisation de la convergence en loi

On appelle R_2 l'ensemble des fonctions $f : B_p \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant

$$\begin{cases} f \in C^2(B_p, \mathbb{R}) \\ \sup_{x \in B_p} |f(x)| + \sup_{x \in B_p} \|D_x f\| + \sup_{x \in B_p} \|D_x^2 f\| \leq 1 \end{cases}$$

où l'on a posé

$$\|D_x^k\| = \sup\{|D_x^k(h_1 \otimes \cdots \otimes h_k); \|h_i\|_{B_p} \leq 1, \forall i \in [1, \dots, k]\}$$

Enfin, pour deux mesures μ et ν sur B_p , on pose

$$d(\mu, \nu) = \sup_{f \in R_2} \left| \int f d\mu - \int f d\nu \right| \quad (3.13)$$

Comme l'espace $B_{p,0}$ est séparable, on sait que la distance d y métrise la convergence en loi.

Comme pour tout $x \in B_{p,0}$ la famille R_2 est stable par $f \mapsto f(\cdot - x)$, on a le résultat suivant

Lemme 25.

$$\forall \mu_1, \mu_2, \nu_1, \nu_2 \in \mathcal{P}(B_{p,0}) \quad d(\mu_1 * \mu_2, \nu_1 * \nu_2) \leq d(\mu_1, \nu_1) + d(\mu_2, \nu_2) \quad (3.14)$$

Preuve : Voir [2], page 37.

■

Lemme 26. Soient μ_1, μ_2 deux mesures gaussiennes centrées sur B_p admettant ϕ_1 et ϕ_2 comme densités spectrales.

Alors

$$d(\mu_1, \mu_2) \leq M_2 \|\phi_1 - \phi_2\|_1,$$

où l'on a posé

$$\|\phi_1 - \phi_2\|_1 = \int_{\mathbb{U}} |\phi_1(z) - \phi_2(z)| dz$$

et où M_2 est la constante déterminée en (3.11).

Preuve : Soit (Ω, F, P) un espace probabilisé supportant des variables aléatoires gaussiennes centrées indépendantes X, Y, Z, T telles que $P_X = \mu_1$, $P_Y = \mu_2$ et que la loi de Z (resp. de T) sous P soit la loi gaussienne centrée admettant $(\phi_1 - \phi_2)^-$ (resp. $(\phi_1 - \phi_2)^+$) comme densité spectrale.

Soit $f \in R_2$. On a $\int f d\mu_1 - \int f d\mu_2 = \mathbb{E}f(X) - \mathbb{E}f(Y)$. On peut écrire

$$\mathbb{E}f(X) - \mathbb{E}f(Y) = (\mathbb{E}f(X) - \mathbb{E}f(X+Z)) + (\mathbb{E}f(X+Z) - \mathbb{E}f(T+Y)) + (\mathbb{E}f(T+Y) - \mathbb{E}f(Y))$$

Mais $X+Z$ et $T+Y$ sont gaussiennes (sommées de deux gaussiennes indépendantes), centrées, et ont même densité spectrale $\phi_1 + (\phi_1 - \phi_2)^- = (\phi_1 - \phi_2)^+ + \phi_2$: elles ont donc même loi, d'où $\mathbb{E}f(X+Z) = \mathbb{E}f(T+Y)$, puis

$$\mathbb{E}f(X) - \mathbb{E}f(Y) = (\mathbb{E}f(X) - \mathbb{E}f(X+Z)) + (\mathbb{E}f(T+Y) - \mathbb{E}f(Y))$$

D'après la formule de Taylor avec reste intégral (licite dans les espaces de Banach, cf. par exemple [7], p. 77), on a

$$f(T+Y) - f(Y) = Df_Y(T) + \int_0^1 (1-t) D^2 f_{Y+tT}(T \otimes T) dt$$

D'où

$$\mathbb{E}f(Y+T) - \mathbb{E}f(Y) = \mathbb{E}Df_Y(T) + \mathbb{E} \int_0^1 (1-t) D^2 f_{Y+tT}(T \otimes T) dt$$

Comme Df est bornée et que Y et T sont indépendantes, on a

$$\mathbb{E}Df_Y(T) = \mathbb{E}Df_Y(\mathbb{E}T) = \mathbb{E}Df_Y(0) = 0.$$

Comme, de plus $\|D^2 f\| \leq 1$, on a

$$|D^2 f_{Y+tT}(T \otimes T)| \leq \|T\|^2$$

et on obtient

$$|\mathbb{E}f(T + Y) - \mathbb{E}f(Y)| \leq \frac{1}{2}\mathbb{E}\|T\|^2.$$

De même $|\mathbb{E}f(X + Z) - \mathbb{E}f(X)| \leq \frac{1}{2}\mathbb{E}\|Z\|^2$.

D'après le lemme 19, on a alors $\mathbb{E}(\|Z\|_{B_p}^2) \leq M_2\|(\phi_1 - \phi_2)^-\|_1$
et $\mathbb{E}(\|T\|_{B_p}^2) \leq M_2\|(\phi_1 - \phi_2)^+\|_1$.

On a donc

$$|\mathbb{E}f(X) - \mathbb{E}f(Y)| \leq M_2\|(\phi_1 - \phi_2)^-\|_1 + M_2\|(\phi_1 - \phi_2)^+\|_1 = M_2\|\phi_1 - \phi_2\|_1$$

On en déduit $d(\mu_1, \mu_2) \leq M_2\|\phi_1 - \phi_2\|_1$.

■

3.5.2 Comportement asymptotique à condition initiale nulle

On suppose désormais que J est un potentiel qui est dans A_p et pour lequel il y a existence d'au moins une mesure de Gibbs. On rappelle que pour cela il est nécessaire et suffisant que soient réalisées les deux conditions suivantes :

$$\begin{aligned} \hat{J}(\mathbb{U}) &\subset \mathbb{R}^+ \\ \int_{\mathbb{U}} \frac{1}{\hat{J}}(z) dz &< +\infty \end{aligned}$$

Théorème 3.2. *Si (X_t) est la solution dans $B_{p,0}$ de l'e.d.s (3.1) à condition initiale nulle, i.e.*

$$X_t = W_t - \frac{J}{2} \int_0^t e^{-(t-s)\frac{J}{2}} W_s ds$$

alors

$$P_{X_t} \Rightarrow \mu_\infty,$$

où μ_∞ est la mesure gaussienne centrée de densité spectrale $\frac{1}{\hat{J}}$.

(Il s'agit ici de convergence dans $\mathcal{P}(B_{p,0})$, ce qui est évidemment plus fort que la convergence dans $\mathcal{P}(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d})$.)

Preuve : D'après le corollaire 1, X_t admet pour densité spectrale

$$\int_0^t \exp(-s\hat{J}) ds = \frac{1}{\hat{J}}(1 - \exp(-t\hat{J}))$$

Si l'on applique le lemme 21 à $\sigma_0^2 = \int \frac{1}{f}(z) dz$, on voit que la famille de lois $(P_{X_t})_{t \geq 0}$ est tendue. D'après le théorème de convergence dominée, tout point d'accumulation de (P_{X_t}) quand t tend vers $+\infty$ admet comme densité spectrale $\frac{1}{f}$. Comme X_t est gaussien centré, la seule mesure limite possible de $(P_{X_t})_{t \geq 0}$ est la mesure gaussienne centrée de densité spectrale $\frac{1}{f}$. Comme la famille est tendue, on en déduit que $(X_t)_{t \geq 0}$ converge en loi pour la topologie de $B_{p,0}$ vers la mesure désirée.

■

3.5.3 La notion d' α -ergodicité

Nous nous plaçons ici sous l'hypothèse que le potentiel étudié est à décroissance exponentielle. Nous voulons alors donner des critères d'ergodicité du système en s'autorisant un grand nombre de conditions initiales : certaines suites à croissance exponentielle pourront même être prises comme condition initiale ! De fait, nous allons nous placer dans un cadre de travail similaire à celui du chapitre 1.

L'objet de ce paragraphe est d'obtenir des résultats d'ergodicité pour un potentiel $J \in \mathcal{S}_\alpha^+$, avec $\alpha > 1$. (Rappelons que de tels potentiels possèdent une symétrie naturelle, décroissent exponentiellement et sont tels qu'on peut leur associer une unique mesure de Gibbs à support dans B_α .)

Définition : On dit que le système stochastique gradient (3.1) associé au potentiel J est α -ergodique si pour tout $x \in B_{\alpha,0}$, la solution de l'e.d.s. à condition initiale déterministe x converge en loi dans $\mathcal{B}_{\alpha,0}$ vers la mesure μ_∞ gaussienne centrée de densité spectrale $\frac{1}{f}$.

Remarque : Il faut souligner que la notion de convergence en loi évoquée ci-dessus dépend de la valeur de α puisque les fonctions sur lesquelles on teste la convergence sont les applications continues de $B_{\alpha,0}$ dans \mathbb{R} . Si $\beta > \alpha$, B_α s'injecte continûment dans B_β . Donc toute application continue de B_β dans \mathbb{R} induit en restriction une application continue de B_α dans \mathbb{R} . On a alors un paradoxe dans la notion d' α -ergodicité, puisque en augmentant β , on agrandit l'ensemble des conditions initiales possibles, mais la notion de convergence en loi est plus faible, ce qui ne permet pas de comparer trivialement les notions d' α -ergodicité et de β -ergodicité. Heureusement, le théorème suivant aura pour corollaire immédiat que pour $\beta > \alpha$, la β -ergodicité implique l' α -ergodicité.

Théorème 3.3. 1. Si $\operatorname{Re}(\hat{J})$ ne s'annule pas sur la couronne \mathbb{U}_α , alors J est α -ergodique.
 2. Si $\operatorname{Re}(\hat{J})$ s'annule sur l'intérieur de la couronne \mathbb{U}_α , alors J n'est pas α -ergodique.

Preuve : On va avoir besoin de quelques lemmes.

Lemme 27. On définit

$$T_\alpha : \begin{array}{ccc} \mathcal{S}_\alpha & \rightarrow & A_1 \\ (a_n)_{n \in \mathbb{Z}^d} & \mapsto & (\alpha^{s(n)} a_n)_{n \in \mathbb{Z}^d} \end{array}$$

Alors T_α est un morphisme d'algèbres et l'on a

$$\forall x \in \mathcal{S}_\alpha \quad \|T_\alpha(x)\|_{A_1} \leq \|x\|_{A_\alpha} \leq 2^d \|T_\alpha(x)\|_{A_1}$$

Preuve : T_α est un morphisme d'algèbre car

$$\forall z \in \mathbb{U} \quad \widehat{T_\alpha(x)}(z) = \hat{x}(\alpha z).$$

La première inégalité est évidente et la deuxième a été démontrée lors de la preuve du lemme 6.

■

Lemme 28. *Si p est un poids de classe \mathcal{E} avec $|p_n| = O(|n|^\eta)$, alors, pour tout entier k tel que $2k > \frac{d}{2} + \eta$, on a*

$$\forall f \in C^{2k}(\mathbb{U}, \mathbb{C}) \exists! F \in A_p \quad f = \hat{F}.$$

De plus, il existe une constante K telle que

$$\|F\|_{A_p} \leq K \|(1 - \Delta)^k f\|_{L^2(\mathbb{U})}.$$

Preuve : Si une telle suite F existe, on a nécessairement $F_n = \langle f, \chi_n \rangle$, où $\chi_n(z) = z^n$. Définissons donc ainsi F

$$\begin{aligned} F_n = \langle f, \chi_n \rangle &= \frac{1}{(1 + |n|^2)^k} \langle f, (1 + |n|^2)^k \chi_n \rangle \\ &= \frac{1}{(1 + |n|^2)^k} \langle f, (1 - \Delta)^k \chi_n \rangle \\ &= \frac{1}{(1 + |n|^2)^k} \langle (1 - \Delta)^k f, \chi_n \rangle \end{aligned}$$

D'où $p_n F_n = \frac{p_n}{(1 + |n|^2)^k} \langle (1 - \Delta)^k f, \chi_n \rangle$, puis par l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\|F\|_{A_p} \leq \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}^d} \frac{p_n^2}{(1 + |n|^2)^{2k}} \right)^{\frac{1}{2}} \|(1 - \Delta)^k f\|_{L^2(\mathbb{U})}$$

■

Lemme 29. *Soit $p \in \mathbb{N}$ et $f \in C^p(\mathbb{U}, \mathbb{C})$. Pour tout n dans \mathbb{N}^d tel que $|n| \leq p$, il existe une fonction $g_n \in C^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{U}, \mathbb{C})$ telle que*

$$\partial_n \exp(-tf) = \exp(-tf) g_n(t, \cdot)$$

et

$$\|g_n(t, \cdot)\|_\infty = O(t^{|n|}).$$

Preuve : On établit le résultat par récurrence sur p . Pour $p = 0$, l'assertion est évidente puisque $g_0 = 1$. Soit $n \in \mathbb{N}^d - \{0\}$ et supposons le résultat établi pour $p < |n|$. On peut trouver $k \in \{1, \dots, d\}$ et $m \in \mathbb{N}^d$ tel que $n = m + e_k$: on a alors $\partial_n = \partial_m \partial_{e_k}$. Or

$$\partial_{e_k} \exp(-tf) = -t \partial_{e_k} f \exp(-tf).$$

On applique alors la formule de Leibnitz :

$$\partial_n \exp(-tf) = -t \sum_{i \leq m} \binom{m}{i} \partial_{m-i} \partial_{e_k} f \partial_i \exp(-tf)$$

On a donc $\partial_n \exp(-tf) = g_n \exp(-tf)$, avec

$$g_n(t, \cdot) = -t \sum_{i \leq m} \binom{m}{i} \partial_{m-i+e_k} f g_i(t, \cdot).$$

Le résultat s'ensuit.

■

Notation Pour $f \in C^N(\mathbb{U}, \mathbb{C})$, on pose

$$\|f\|_{D^N} = \max\{|\partial_k f(x)|; x \in \mathbb{U}, |k| \leq N\}.$$

Lemme 30. Soit p un poids de classe \mathcal{E} avec $|p_n| = O(|n|^\eta)$, et $\phi \in A_p$ vérifiant $\hat{\phi} \in C^{2k}(\mathbb{U}, \mathbb{C})$, où k est un entier tel que $2k > \frac{d}{2} + \eta$. Alors

1. $\forall F \in A_p, \quad \forall \varepsilon > 0$, on a

$$\|\phi * \exp(-tF)\|_{A_p} = o(e^{-(m_\phi(F)-\varepsilon)t}),$$

où

$$m_\phi(F) = \inf\{\operatorname{Re} \hat{F}(z); z \in \operatorname{supp} \hat{\phi}\}.$$

2. Si $\hat{F} \in C^{2k}(\mathbb{U}, \mathbb{C})$, on peut être plus précis : il existe une constante $K_{F,k,p}$ indépendante de ϕ telle que

$$\forall t \geq 0 \quad \|\phi * \exp(-tF)\|_{A_p} \leq K_{F,k,p} \|\hat{\phi}\|_{D^{2k}} t^{2k} e^{-m_\phi(F)t}.$$

Preuve : On va commencer par démontrer la deuxième partie du lemme : soit donc F tel que $\hat{F} \in C^{2k}(\mathbb{U}, \mathbb{C})$. D'après le lemme 28, on a

$$\begin{aligned} \|\phi * \exp(-tF_n)\|_{A_p} &\leq K \|(1 - \Delta)^k (\hat{\phi} \exp(-t\hat{F}_n))\|_{L^2(\mathbb{U})} \\ &\leq K \sup\{|(1 - \Delta)^k (\hat{\phi} \exp(-t\hat{F}_n))(z)|, z \in \operatorname{supp} \hat{\phi}\} \end{aligned}$$

En développant $(1 - \Delta)^k$ par la formule du binôme, puis le résultat obtenu par la formule de Leibnitz, on voit qu'il existe une constante $K^{(1)}$ telle que

$$\forall f, g \in C^{2k}(\mathbb{U}, \mathbb{C}) \quad \|(1 - \Delta)^k fg\|_\infty \leq K^{(1)} \|f\|_{D^{2k}} \max\{|\partial_i g(x)|; x \in \operatorname{supp} f, |i| \leq 2k\}.$$

On en déduit

$$\begin{aligned} \|\phi * \exp(-tF_n)\|_{A_p} &\leq K K^{(1)} \max_{|i| \leq 2k} \|g_i(t, \cdot)\|_\infty \|\hat{\phi}\|_{D^{2k}} (e^{-m_\phi(F)t}) \\ &\leq K_{F,k,p} \|\hat{\phi}\|_{D^{2k}} t^{2k} e^{-m_\phi(F)t}, \end{aligned}$$

la dernière inégalité étant obtenue grâce au lemme 29, ce qui établit la première partie du lemme.

Passons maintenant au cas général : soit $F \in A_p$. Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $F_n(i) = F(i)$ si $|i| \leq n$, 0 sinon. Il est clair que \hat{F}_n est C^∞ et que F_n tend vers F . Choisissons n tel que $\|F - F_n\|_{A_p} < \varepsilon/3$. On a

$$|m_\phi(F_n) - m_\phi(F)| \leq \|\hat{F}_n - \hat{F}\|_\infty \leq \|F_n - F\|_{A_p} < \frac{\varepsilon}{3}$$

et

$$\phi * \exp(-tF) = \phi * \exp(-tF_n) * \exp(t(F_n - F))$$

Donc

$$\begin{aligned} \|\phi * \exp(-tF)\|_{A_p} &\leq \|\phi * \exp(-tF_n)\|_{A_p} \|\exp(t(F_n - F))\|_{A_p} \\ &\leq \|\phi * \exp(-tF_n)\|_{A_p} e^{\|F_n - F\|_{A_p} t} \end{aligned}$$

On a alors

$$\|\phi * \exp(-tF)\|_{A_p} \leq K_{F_n, k, p} \|\hat{\phi}\|_{D^{2k}} t^{2k} e^{-(m_\phi(F) - \frac{2}{3}\varepsilon)t},$$

d'où le résultat voulu.

■

Corollaire 3.2. *Soit $F \in A_1$ et η un réel strictement positif tels que $\operatorname{Re} \hat{F} > \eta$. Alors*

$$\|\exp(-tF)\|_{A_1} = o(e^{-\eta t}).$$

Preuve : Il suffit d'appliquer le lemme précédent à $p = 1$ et $\phi = \delta_0$. On a alors $\alpha = 0$ et $\hat{\phi} = 1$ est C^∞ . L'hypothèse qui est faite implique $m_\phi(F) > a$.

■

Remarque : Soulignons que l'hypothèse $\hat{F} \geq 0$ ne suffit pas pour avoir $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\exp(-tF)\|_{A_1} = 0$. Posons $F = \delta_0 - M$, avec $M(k) = \frac{1}{2d}$ si $\|k\| = 1$, 0 sinon. C'est le potentiel correspondant au modèle harmonique et on a déjà vu que $\hat{F} \geq 0$. On a

$$\exp(-tF) = \exp(-t\delta_0) \exp(tM) = \exp(-t) \exp(tM)$$

Mais il est facile de voir que si A et B sont à termes positifs, on a $\|A * B\| = \|A\| \|B\|$ et $\|A + B\| = \|A\| + \|B\|$, d'où $\|\exp(A)\| = \exp(\|A\|)$. On a donc $\|\exp(tM)\| = \exp(t)$, d'où

$$\forall t \geq 0 \quad \|\exp(-tF)\| = 1.$$

■

On peut à présent prouver le théorème. Remarquons tout d'abord que d'après l'expression de la solution de l'e.d.s.

$$X_t = e^{-t\frac{J}{2}}\zeta + W_t - \frac{J}{2} \int_0^t e^{-(t-s)\frac{J}{2}} W_s ds$$

et le théorème 3.2, le système déterminé par J est α -ergodique si et seulement si pour tout $x \in B_{\alpha,0}$ $\exp(-\frac{t}{2}J)x$ tend vers 0 dans $B_{\alpha,0}$.

Supposons que $\text{Re}(\hat{J})$ ne s'annule pas sur \mathbb{U}_α . Comme $\text{Re}(\hat{J}) > 0$ sur \mathbb{U} , on en déduit qu'il existe $b' > 0$ tel que $\text{Re}(\hat{J}) > b'$ sur \mathbb{U}_α . D'après le lemme 27, on a donc $\text{Re}(\widehat{T_\alpha(\frac{J}{2})}) > \frac{b'}{2}$. D'après le corollaire 3.2, on a alors

$$\|\exp(-tT_\alpha(\frac{J}{2}))\|_{A_1} = o(e^{-\frac{b'}{2}t})$$

Mais comme T_α est un morphisme d'algèbres $\exp(-tT_\alpha(\frac{J}{2})) = T_\alpha(\exp(-\frac{t}{2}J))$. D'après la deuxième inégalité du lemme 27, on a également

$$\|\exp(-\frac{t}{2}J)\|_{A_\alpha} = o(e^{-\frac{b'}{2}t}). \quad (3.15)$$

L'ergodicité s'ensuit puisque

$$\|\exp(-\frac{t}{2}J)x\|_{B_{\alpha,0}} \leq \|\exp(-\frac{t}{2}J)\|_{L(B_{\alpha,0})}\|x\|_{B_{\alpha,0}} = \|\exp(-\frac{t}{2}J)\|_{A_\alpha}\|x\|_{B_{\alpha,0}}.$$

Supposons maintenant que $\text{Re}(\hat{A})$ s'annule dans l'intérieur de \mathbb{U}_α . Comme \hat{A} est holomorphe, donc ouverte sur l'intérieur de \mathbb{U}_α , il existe z dans l'intérieur de \mathbb{U}_α tel que $\text{Re}(\hat{A})(z) < 0$. On a donc $\lim_{t \rightarrow \infty} |\exp(-t\hat{A}(z))| = +\infty$ Mais

$$|\exp(-t\hat{A}(z))| = \widehat{\|\exp(-\frac{t}{2}J)(z)\|} \leq \|\exp(-\frac{t}{2}J)\|_{A_\alpha} = \|\exp(-\frac{t}{2}J)\|_{L(B_{\alpha,0})}$$

Donc $(\|\exp(-\frac{t}{2}J)\|_{L(B_{\alpha,0})})_{t \geq 0}$ n'est pas bornée. D'après le théorème de Banach-Steinhaus, il existe $x \in B_{\alpha,0}$ tel que $\exp(-\frac{t}{2}J)x$ n'est pas bornée, ce qui empêche l' α -ergodicité.

■

Exemple

On prend ici $d = 1$ et on définit J par

$$J(n) = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!(|n| + k)!}$$

On a

$$\forall n \in \mathbb{Z} \quad |J(n)| \leq \frac{K}{|n|!},$$

où

$$K = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!^2},$$

donc $\forall \alpha > 1 \quad J \in A_\alpha$. On vérifie facilement que $\hat{J}(z) = \exp(z + z^{-1})$, d'où $J \in \mathcal{S}_\alpha^+$. $\operatorname{Re} \hat{J}(z) = 0$ si et seulement si $z + z^{-1} \in \mathbb{R} + i\mathbb{Z} + i\frac{\pi}{2}$. Cherchons la racine de module strictement supérieur à un minimal : on pose $z = re^{i\theta}$ avec $r > 1$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $(r - \frac{1}{r}) \sin \theta = \frac{\pi}{2} + \pi n$. On a alors

$$\frac{\pi}{2} \leq |\frac{\pi}{2} + \pi n| = (r - \frac{1}{r}) |\sin \theta| \leq r - \frac{1}{r}$$

Comme $r \mapsto r - \frac{1}{r}$ est strictement croissante r est minimal pour $\theta = \frac{\pi}{2}$ et $r - \frac{1}{r} = \frac{\pi}{2}$, soit

$$r = \frac{\pi}{4} + \sqrt{\frac{\pi^2}{16} + 1} \sim 2,057.$$

Le système déterminé par J est donc α -ergodique pour $\alpha < r$, mais pas pour $\alpha > r$.

3.5.4 Description des lois limites dans un cadre de transition de phase

On suppose dans cette section que J décroît comme l'inverse d'une fonction polynômiale, plus précisément $J \in A_a$, avec $a_n = 1 + 2^\eta n^\eta$ et $\eta > 0$. De plus, la transition de phase n'est pas exclue, c'est à dire que \hat{J} peut s'annuler sur \mathbb{U} .

On a besoin de quelques résultats et définitions avant de pouvoir énoncer notre théorème.

Définitions Pour $u \in B_a$, on définit $\tilde{u} \in A'_a$ par

$$\forall x \in A_a \quad \tilde{u}(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} u_n x_n,$$

et l'on appelle *support spectral* de la suite u l'ensemble

$$\operatorname{spec} u = \operatorname{supp} \tilde{u} = \mathfrak{C} \cup_{O \in \mathcal{O}_u} O,$$

où

$$\mathcal{O}_u = \{O \text{ ouvert de } \mathbb{U}, \forall f \in A_a \text{ supp } \hat{f} \subset O \Rightarrow \tilde{u}(f) = 0\}.$$

Enfin, pour $J \in A_a$,

$$\ker J = \{u \in B_a, Ju = 0\}.$$

Quelques propriétés simples Il est facile de vérifier que

$$\forall u \in B_a, \forall \lambda \neq 0 \quad \text{spec}(\lambda u) = \text{spec } u$$

et

$$\forall u, v \in B_a \quad \text{spec}(u + v) \subset \text{spec } u \cup \text{spec } v$$

Afin que la notion de support spectral ne demeure pas totalement abstraite, nous allons donner quelques exemples. Ces exemples permettront, dans une certaine mesure, de justifier la terminologie choisie.

3.5.4.1 Exemples de supports spectraux

- Déterminons d'abord le support de la suite nulle : il est facile de voir que tout ouvert O de \mathbb{U} est dans \mathcal{O}_0 . Par suite le support spectral de la suite nulle (notée 0) est vide.
- Prenons maintenant $u = \delta_0$ (on rappelle que c'est la suite dont tous les termes sont nuls, sauf celui d'indice 0 qui vaut 1). On a pour $J \in A_a$

$$\tilde{u}(J) = J(0) = \int_{\mathbb{U}} \hat{J}(z) dz$$

Pour tout ouvert O de \mathbb{U} , on peut construire une fonction $f \in C^\infty$ positive, non identiquement nulle et dont le support est inclus dans O . On trouve alors $J \in A_a$ tel que $f = \hat{J}$, ce qui prouve que $O \notin \mathcal{O}_{\delta_0}$. Il s'ensuit que le support de δ_0 est le tore \mathbb{U} tout entier.

Ces deux exemples nous mettent en garde contre des analogies abusives avec la notion de spectre d'un opérateur. On voit par exemple que la propriété pour un point de \mathbb{U} de ne pas appartenir au support spectral n'est pas stable pour de petites perturbations de u (au sens de $\|\cdot\|_{A_a}$) : en effet $\text{spec } 0 = \emptyset$, tandis que pour tout $\lambda \neq 0$ aussi petit que l'on veut, $\text{spec } \lambda \delta_0 = \mathbb{U}$. La comparaison avec les distributions est plus appropriée, d'autant que l'on verra que B_a s'identifie au dual d'un espace de fonctions.

– **Exemple fondamental** : Soit u la suite définie par

$$u_n = z^n,$$

avec $z \in \mathbb{U}$ fixé. On va montrer que l'on a

$$\text{spec } u = \{z\}.$$

Montrons d'abord que $z \in \text{spec } u$. Soit O un ouvert contenant z . On peut construire une fonction $f \in C^\infty$, telle que $f(z) = 1$ et dont le support est inclus dans O . On trouve alors $J \in A_a$ tel que $f = \hat{J}$: on a

$$\tilde{u}(J) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} J(n) z^n = \hat{J}(z) = f(z) = 1,$$

ce qui prouve que $O \notin \mathcal{O}_u$. Ceci implique qu'aucun élément de \mathcal{O} ne peut contenir z , d'où $z \in \text{spec } u$. Réciproquement, soit $x \in \mathbb{U} \setminus \{z\}$. On peut trouver un voisinage O de x ne contenant pas z . Soit alors $J \in A_a$ tel que $\text{supp } \hat{J} \subset O$: on a alors $\tilde{u}(J) = \hat{J}(z) = 0$, puisque z n'est pas dans O , donc *a fortiori* pas dans le support de \hat{J} . Ceci prouve $O \in \mathcal{O}_u$, d'où $x \notin \text{spec } u$, puisque $x \in O$.

3.5.4.2 La convergence en temps

Maintenant que nous nous sommes un peu familiarisés avec les outils théoriques, nous pouvons présenter le théorème principal :

Théorème 3.4. *Soit J un potentiel appartenant à A_a , avec $a_n = (1+n)^\eta$, avec $\eta > 0$. Pour $x \in B_{a,0}$, notons μ_t^x la loi au temps t de l'équation différentielle stochastique (3.1) à condition initiale $\zeta = x$. Si x s'écrit $x = u + s$ avec $s \in \ker J$ et $\inf\{\hat{J}(z); z \in \text{spec } u\} > 0$, alors on a*

$$\mu_t^x \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} \tau_s \mu_\infty,$$

où μ_∞ est la mesure gaussienne centrée de densité spectrale $\frac{1}{j}$ et $\tau_s \mu_\infty$ la mesure image de μ_∞ par la translation τ_s de vecteur s .

Avant de démontrer ce théorème, faisons quelques remarques.

Remarque Si J est une suite à décroissance rapide, ou de manière équivalente si \hat{J} est C^∞ sur \mathbb{U} , alors quel que soit $\eta \in \mathbb{N}$, J est dans le A_a correspondant et la famille des normes permet de munir l'ensemble des suites à décroissance rapide d'une structure d'espace de Fréchet. Muni de cette topologie, l'espace des

suites à décroissance rapide est isomorphe par $J \mapsto \hat{J}$ à l'espace des fonctions C^∞ sur \mathbb{U} muni de la topologie de la convergence uniforme de chaque dérivée. En dualité, on obtient l'espace des suites à croissance lente, isomorphe à l'espace des distributions sur \mathbb{U} . Ainsi, le résultat que nous allons montrer est plus fin que ce que l'on aurait pu obtenir en prenant directement pour espace d'états l'ensemble des suites à croissance modérée : en précisant la lenteur de croissance de la suite initiale, on affaiblit la décroissance nécessaire sur J . Notons également que le résultat établi ici contredit un énoncé de Kondratiev et Sokol [29] (partie 1, cas B page 230). En effet, ils affirment que si la condition initiale x n'est pas dans $\ker J$, alors le système converge vers μ_∞ , ce qui est contradictoire avec notre résultat – considérer $x = u + s$ avec $s \in \ker J - \{0\}$ et $\inf\{\hat{J}(z); z \in \text{spec } u\} > 0$. Il semble que l'erreur dans leur raisonnement soit la suivante : ils considèrent que si $x \notin \ker J$, alors $e^{-tJ}x \rightarrow 0$. Ceci est valide pour $x \in \ell^2$, mais pas pour tout x à croissance modérée.

Preuve : Nous allons nous appuyer sur quelques lemmes.

Lemme 31.

L'application $u \mapsto \tilde{u}$ réalise une isométrie de B_a sur A'_a .

Preuve : Pour $x \in A_a, u \in B_a$, on a

$$\tilde{u}(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} a_n x_n \frac{u_n}{a_n},$$

d'où

$$|\tilde{u}(x)| \leq \|u\|_{B_a} \|x\|_{A_a},$$

soit $\|\tilde{u}\|_{A'_a} \leq \|u\|_{B_a}$.

Soit maintenant ϕ une forme linéaire continue sur A_a . Pour $x \in A_a$, on a

$$x = \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} x_n \delta_n.$$

Comme ϕ est continue, on a

$$\phi(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} x_n \phi(\delta_n).$$

Soit $n \in \mathbb{Z}^d$. On choisit maintenant de prendre $x = \frac{1}{a_n} \delta_n$. On a $\|x\|_{A_a} = 1$, donc

$$|\phi(x)| \leq \|\phi\|_{A'_a}.$$

On a donc

$$\forall n \in \mathbb{Z}^d \quad \frac{|\phi(\delta_n)|}{a_n} \leq \|\phi\|_{A'_a}.$$

Ainsi, si l'on pose $u_n = \phi(\delta_n)$, on a $u \in B_a$, avec

$$\|u\|_{B_a} \leq \|\phi\|_{A'_a}$$

et $\phi = \tilde{u}$. Ce qui achève la preuve.

■

Lemme 32.

Si $A \in A_a$ est paire et $u \in B_a$, alors $\tilde{A}u = A.\tilde{u}$

Preuve : Comme l'espace vectoriel engendré par les δ_n est dense dans A_a , il suffit de vérifier que ces deux formes linéaires coïncident en les δ_n . D'une part

$$\tilde{A}u(\delta_n) = (Au)_n = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} A(n-k)u_k \quad .$$

D'autre part

$$(A.\tilde{u})(\delta_n) = \tilde{u}(A\delta_n) = \tilde{u}\left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^d} A(n-k)\delta_k\right) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} A(n-k)\tilde{u}(\delta_k) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} A(n-k)u_k \quad .$$

■

Lemme 33. Pour tout $u \in B_a$, \mathcal{O}_u est stable par union quelconque.

Preuve : Soit I un ensemble d'index, et $(O_i)_{i \in I}$ une famille d'ouverts de \mathcal{O}_u . D'après le théorème de partition de l'unité, on peut trouver une famille $(\phi_i)_{i \in I}$ de fonctions $C^\infty(\mathbb{U}, \mathbb{R})$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{U} \quad \sum_{i \in I} \phi_i(x) = 1,$$

et telle que pour tout compact $K \subset O$,

$$\{i \in I, \exists x \in K, \phi_i(x) \neq 0\}$$

est fini (cf, par exemple [43], théorème 6.20 p. 162).

$$\text{supp } \phi_i \subset O_i.$$

On sait qu'il existe $a_i \in A_a$ tel que $\hat{a}_i = \phi_i$. Posons $O = \cup_{i \in I} O_i$: il est clair que O est ouvert. Soit $f \in A_a$ tel que $\text{supp } \hat{f} \subset O$. Comme $\text{supp } \hat{f}$ est compact, il existe un sous-ensemble fini $J \subset I$ tel que

$$\text{supp } \hat{f} \subset \cup_{j \in J} O_j$$

et

$$\hat{f} = \sum_{j \in J} \phi_j \hat{f}.$$

Par suite, on a

$$f = \sum_{j \in J} a_j * f,$$

d'où

$$\tilde{u}(f) = \sum_{j \in J} \tilde{u}(\phi_j * f).$$

Mais

$$\text{supp } \widehat{a_j * f} = \text{supp } a_j \hat{f} \subset \text{supp } \phi_j \subset O_j,$$

donc $\tilde{u}(a_j * f) = 0$, puis $\tilde{u}(f) = 0$. On a donc montré que $O \in \mathcal{O}_u$, qui est donc bien stable par union quelconque.

■

Lemme 34. *Soient $f, g \in A_a$ et $\tilde{u} \in A'_a$. Si \hat{f} et \hat{g} coïncident sur un voisinage de $\text{supp } \tilde{u}$, alors $\tilde{u}(f) = \tilde{u}(g)$.*

Preuve : Par linéarité, on peut supposer $g = 0$. Soit V un ouvert contenant $\text{supp } \tilde{u}$ sur lequel \hat{J} s'annule : alors

$$\text{supp } \hat{f} \subset \mathbf{C}V \subset \cup_{O \in \mathcal{O}_u} O = O'.$$

D'après le lemme 33, $O' \in \mathcal{O}_u$, et donc par définition de \mathcal{O}_u , on a $\tilde{u}(f) = 0$.

■

Notations On note Υ_J l'application de $B_{p,0}$ dans $[0, +\infty]$ définie par

$$\Upsilon_J(u) = \inf\{\hat{J}(z); z \in \text{spec } u\}.$$

Pour $\tau > 0$, on pose

$$E_{J,\tau} = \{v \in B_a \mid \Upsilon_J(v) \in \cup[\tau, +\infty]\}.$$

Lemme 35. 1. *Soit $u \in B_{p,0}$ admettant la décomposition $u = v + s$ avec $s \in \ker J$.*

Alors, on a pour tout $\varepsilon > 0$:

$$\|\exp(-tJ)u - s\|_{B_a} = o(e^{-(\Upsilon_J(v) - \varepsilon)t}).$$

2. Si $\hat{J} \in C^{2k}(\mathbb{U}, \mathbb{C})$, avec $2k > \frac{d}{2} + \alpha$, on a le résultat plus précis suivant :
il existe une constante $K'_{J,k,p}$ telle que

$$\begin{aligned} \forall u \in B_{p,0}, u = v + s, s \in \ker J \\ \forall t \geq 1 \|\exp(-tJ)u - s\|_{B_a} \leq K'_{J,k,p} \|v\|_{B_a} t^{4k} e^{-\Upsilon_J(v)t}. \end{aligned}$$

Preuve : On a $\exp(-tJ)u = \exp(-tJ)v + \exp(-tJ)s$. En développant en série l'exponentielle, on voit que comme $J^2 s = 0$, on a pour tout $n \geq 1$ $\frac{(-tJ)^n}{n!} s = 0$, d'où $\exp(-tJ)s = s$. Il reste à contrôler $\exp(-tJ)v$. On a

$$\|\exp(-tJ)v\|_{B_a} = \|\exp(-tJ).\tilde{v}\|_{A'_a} = \sup_{\|\phi\|_{A_a} \leq 1} |\tilde{v}(\exp(-tJ) * \phi)|$$

Soit $\hat{\psi}$ une fonction de classe C^{2k} avec $2k > \frac{d}{2} + \alpha$ valant 1 sur

$$\{z \in \mathbb{U} \quad \hat{J}(z) \geq \Upsilon_J(v) - \frac{\varepsilon}{4}\}$$

et 0 sur

$$\{z \in \mathbb{U} \quad \hat{J}(z) \leq \Upsilon_J(v) - \frac{\varepsilon}{2}\}.$$

D'après le lemme 28 c'est la transformée d'un élément $\psi \in A_a$. On a $\text{supp } \tilde{v} \subset \{z \in \mathbb{U} \quad \hat{J}(z) \geq \Upsilon_J(v)\}$. Comme \hat{J} est continue, $\{z \in \mathbb{U} \quad \hat{J}(z) \geq \Upsilon_J(v) - \frac{\varepsilon}{4}\}$ est un voisinage de $\text{supp } \tilde{v}$ et on a donc d'après le lemme 34

$$\tilde{v}(\exp(-tJ) * \phi) = \tilde{v}(\psi * \exp(-tJ) * \phi)$$

Maintenant

$$|\tilde{v}(\psi * \exp(-tJ) * \phi)| \leq \|\tilde{v}\|_{A'_a} \|\psi * \exp(-tJ)\|_{A_a} \|\phi\|_{A_a} \quad (3.16)$$

On a donc

$$\|\exp(-tJ)v\|_{B_a} \leq \|v\|_{B_a} \|\psi * \exp(-tJ)\|_{A_a}$$

Mais $m_\psi(J) \geq \Upsilon_J(v) - \frac{\varepsilon}{2}$, et en appliquant la première partie du lemme 30, on prouve la première assertion recherchée. Voyons à présent comment affiner le raisonnement pour obtenir le deuxième résultat voulu : il s'agit de majorer le second membre de (3.16), et pour cela, faire de bons choix pour ϕ et ε .

Soit Ψ une fonction $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ valant 0 sur $]-\infty, 0]$ et 1 sur $[1, +\infty[$. Pour des réels a et b vérifiant $a < b$, on pose

$$\Psi_{a,b}(x) = \Psi\left(\frac{x-a}{b-a}\right),$$

de sorte que $\Psi_{a,b}$ est une fonction $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ valant 0 sur $]-\infty, a]$ et 1 sur $[b, +\infty[$. Il est facile de voir que, pour tout $i \geq 0$, on a l'égalité

$$\sup_{\mathbb{R}} |\Psi_{a,b}^{(i)}| = \frac{1}{(b-a)^i} \sup_{\mathbb{R}} |\Psi^{(i)}|$$

D'autre part, il existe une constante M_N telle que pour tout $g \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et tout $f \in C^N(\mathbb{U}, \mathbb{R})$, on ait

$$\|g \circ f\|_{D^N} \leq M_N \|f\|_{D^N} \max_{0 \leq i \leq N} \sup_{\mathbb{R}} |g^{(i)}|.$$

Soit maintenant $t \geq 1$ fixé. On choisit alors de poser

$$\hat{\psi} = \Psi_{\tau - \frac{\varepsilon}{2}, \tau - \frac{\varepsilon}{4}} \circ \hat{J},$$

où ε reste à déterminer. On a alors

$$\begin{aligned} \|\hat{\psi}\|_{D^{2k}} &\leq M_{2k} \|\hat{J}\|_{D^{2k}} \max_{0 \leq i \leq 2k} \sup_{\mathbb{R}} |\Psi_{\tau - \frac{\varepsilon}{2}, \tau - \frac{\varepsilon}{4}}^{(i)}| \\ &\leq M_{2k} \|\hat{J}\|_{D^{2k}} \max_{0 \leq i \leq 2k} \left(\frac{4}{\varepsilon}\right)^i \sup_{\mathbb{R}} |\Psi^{(i)}| \\ &\leq M_{2k} \|\hat{J}\|_{D^{2k}} \max\left(1, \left(\frac{4}{\varepsilon}\right)^{2k}\right) \max_{0 \leq i \leq 2k} \sup_{\mathbb{R}} |\Psi^{(i)}| \end{aligned}$$

On pose alors $\varepsilon = \frac{4}{t}$, et l'on applique la deuxième partie du lemme 30 pour majorer $\|\psi * \exp(-tJ)\|_{A_a}$: on a

$$m_\psi(J) \geq \Upsilon_J(v) - \frac{\varepsilon}{2} = \Upsilon_J(v) - \frac{2}{t},$$

ce qui entraîne

$$\|\exp(-tJ)u - s\|_{B_a} \leq K'_{J,k,p} \|v\|_{B_a} t^{4k} e^{-\Upsilon_J(v)t},$$

avec

$$K'_{J,k,p} = e^2 K_{J,k,p} M_{2k} \|\hat{J}\|_{D^{2k}} \max_{0 \leq i \leq 2k} \sup_{\mathbb{R}} |\Psi^{(i)}|.$$

■

On en déduit aisément le théorème.

■

Remarques Dans ce qui suit, on prouve que l'ensemble des conditions initiales admissibles $\{u\}$ est assez gros.

1. Il est aisé de construire des suites u non nulles vérifiant l'hypothèse $\inf\{\hat{J}(z); z \in \text{spec } u\} > 0$: soient z_1, \dots, z_p des éléments de \mathbb{U} tels que

$$\forall i \in [1, \dots, p] \quad \hat{J}(z_i) > 0.$$

Si l'on se donne des nombres complexes $\lambda_1, \dots, \lambda_p$, la suite u définie par

$$u_n = \operatorname{Re} \left(\sum_{i=1}^p \lambda_i (z_i)^n \right) \quad (3.17)$$

vérifie

$$\operatorname{spec} u \subset \{z_1, \dots, z_p\},$$

ce qui montre qu'elle vérifie bien la condition désirée.

2. Si K est un compact de \mathbb{U} sur lequel \hat{J} ne s'annule pas, toute suite s'écrivant comme en (3.17), avec les z_i appartenant à K est dans l'espace vectoriel $E_{J,\tau}$, où l'on a posé $\tau = \inf_{z \in K} \hat{J}(z)$. Si l'on montre que $E_{J,\tau}$ est fermé pour la topologie $*$ -faible de B_a , il s'ensuivra que toute limite faible de telles suites appartient à $E_{J,\tau}$ et vérifie donc également l'hypothèse $\inf\{\hat{J}(z); z \in \operatorname{spec} u\} > 0$.

Lemme 36. *$E_{J,\tau}$ est un espace vectoriel fermé pour la topologie $*$ -faible de B_a .*

Preuve : Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ une suite d'éléments de $E_{J,\tau}$ convergeant vers $u \in B_a$. On a, pour tout $n \geq 1$, $\operatorname{supp} u_n \subset F = \{z \in \mathbb{U}, \hat{J}(z) \geq \tau\}$. Autrement dit, si O' est l'ouvert $\mathbb{U} \setminus F$, on a pour tout $n \geq 1$ $O' \subset \cup_{O \in \mathcal{O}_{u_n}} O$. D'après le lemme 33 $\cup_{O \in \mathcal{O}_{u_n}} O \in \mathcal{O}_{u_n}$, mais il est facile de voir que si O_1 et O_2 sont des ouverts vérifiant $O_1 \subset O_2$, alors $O_2 \in \mathcal{O}_u \implies O_1 \in \mathcal{O}_u$. On a donc $O' \in \mathcal{O}_{u_n}$. Soit maintenant $f \in A_a$ telle que $\operatorname{supp} \hat{f} \subset O'$.

On a pour tout n $\tilde{u}_n(f) = 0$, d'où à la limite $\tilde{u}(f) = 0$. D'où $O' \in \mathcal{O}_u$, soit $\operatorname{supp} u \subset F$, ce qui est équivalent à $u \in E_{J,\tau}$.

$E_{J,\tau}$ est donc fermé pour la topologie $*$ -faible de B_a .

■

3.6 Vitesse de convergence de la dynamique

3.6.1 Vitesse en l'absence de transition de phase

Nous allons établir ici qu'en l'absence de transition de phase, dans les cas où nous avons été capables d'établir la convergence du système, cette convergence se fait à une vitesse exponentielle.

Lemme 37. *On suppose que \hat{J} ne s'annule pas sur \mathbb{U} , ou, de manière équivalente, que l'on a*

$$a = \inf_{\mathbb{U}} \hat{J} > 0.$$

Alors on a

$$\|\phi_t - \phi_\infty\|_1 = O(e^{-at}),$$

où ϕ_t est la densité spectrale de X_t , i.e.

$$\phi_t(z) = \frac{1}{\hat{J}(z)}(1 - e^{-t\hat{J}(z)}) \quad (3.18)$$

et ϕ_∞ celle de μ_∞ , i.e.

$$\phi_\infty(z) = \frac{1}{\hat{J}(z)}. \quad (3.19)$$

Preuve : On a

$$\|\phi_t - \phi_\infty\|_1 = \int_{\mathbb{U}} \frac{1}{\hat{J}(z)} e^{-t\hat{J}(z)} dz \quad (3.20)$$

d'où

$$\|\phi_t - \phi_\infty\|_1 \leq \frac{1}{a} e^{-at}$$

■

Nous pouvons à présent démontrer que la vitesse de convergence du système se fait à vitesse exponentielle lorsque \hat{J} ne s'annule pas sur \mathbb{U} . On a deux théorèmes, l'un pour J potentiel Γ -invariant à décroissance exponentielle, et l'autre pour J décroissant comme l'inverse d'une fonction puissance.

Théorème 3.5. *On suppose que $J \in \mathcal{S}_\alpha^+$, avec $\alpha > 1$ et que $\text{Re } \hat{J}$ ne s'annule pas sur \mathbb{U}_α . On pose $b = \inf_{\mathbb{U}_\alpha} \text{Re } \hat{J}$ et $c = \inf_{\mathbb{U}} \hat{J}$. Alors, on peut trouver une constante K telle que pour tout $b' < b$, il existe une constante $L_{b'}$ telles que*

$$\forall x \in B_{\alpha,0}, \forall t \geq 0 \quad d(\mu_t^x, \mu) \leq K e^{-ct} + L_{b'} \|x\|_{B_\alpha} e^{-\frac{b'}{2}t},$$

où μ_t^x désigne la loi au temps t de la solution de l'équation (3.2) à condition initiale déterministe x .

Preuve : On a

$$d(\mu, \mu_t^x) \leq d(\mu, \mu_t^0) + d(\mu_t^0, \mu_t^x)$$

On a

$$d(\mu, \mu_t^0) \leq M_2 \|\Phi_t - \Phi_\infty\|_1 \leq \frac{M_2}{c} e^{-ct}.$$

D'autre part

$$\begin{aligned}
d(\mu_t^0, \mu_t^x) &= d(\mu_t^0, \tau_{e^{-\frac{t}{2}J}x} \mu_t^0) \\
&\leq \|e^{-\frac{t}{2}J}x\|_{B_\alpha} \\
&\leq \|e^{-\frac{t}{2}J}\|_{A_\alpha} \|x\|_{B_\alpha} \\
&\leq L \|x\|_{B_\alpha} e^{-\frac{b'}{2}t}
\end{aligned}$$

(la dernière inégalité ayant été démontrée en (3.15).)

■

Théorème 3.6. *On suppose que $J \in A_a$, avec $a_n = 1 + 2^n n^\eta$ et $\eta > 0$. On suppose également que \hat{J} ne s'annule pas sur \mathbb{U} . On pose $c = \inf_{\mathbb{U}} \hat{J}$. Alors, on peut trouver une constante K telle que pour tout $b' < c$, il existe une constante $L_{b'}$ telles que*

$$\forall x \in B_{a,0} \quad \forall t \geq 0 \quad d(\mu_t^x, \mu) \leq K e^{-ct} + L_{b'} \|x\|_{B_a} e^{-\frac{b'}{2}t},$$

où μ_t^x désigne la loi au temps t de la solution de l'équation (3.2) à condition initiale déterministe $X_0 = x$.

Preuve : Mise à part la dernière inégalité, qui est ici une conséquence du lemme 35, la preuve précédente demeure inchangée.

■

Remarques :

1. Il est bien entendu possible en affaiblissant un peu le résultat d'obtenir une présentation plus compacte. Nous avons choisi de conserver cette forme afin qu'apparaissent nettement les deux contributions distinctes : la partie proprement stochastique, indépendante de la condition initiale, qui décroît en $O(e^{-at})$, et la partie déterministe, dépendant de la condition initiale, en $O(e^{-\frac{b'}{2}t})$.
2. Les vitesses de convergence trouvées ici sont cohérentes avec les résultats démontrés dans [12] par Da Prato et Zabczyk. Dans leur article, ils s'intéressent à l'existence de solutions et au comportement asymptotique de systèmes stochastiques où la dérive est la somme d'un opérateur linéaire et d'une perturbation. Dans le cadre linéaire pur avec interaction stationnaire qui nous intéresse ici, leurs hypothèses sont que la portée est finie et que J est accréatif dans $\ell^2(\mathbb{Z}^d)$ – i.e. $\|Jx\|_2 \geq K\|x\|_2$ pour un certain $K > 0$. Mais on connaît le spectre d'un opérateur de Toeplitz dans $\ell^2(\mathbb{Z}^d)$: c'est $\hat{J}(\mathbb{U})$ (cf. par exemple [20], ex. 248). Cette

condition d'accrétivité est donc équivalente au fait que \hat{J} ne s'annule pas. Sous ces conditions, ils obtiennent une convergence ergodique à vitesse exponentielle pour des conditions initiales dans $E = l^2(\rho)$, où ρ est un poids exponentiel ou polynômial tel que J soit un opérateur continu dans E .

3.6.2 Vitesse en présence de transition de phase

On va étudier la vitesse de convergence du système vers l'équilibre quand il y a transition de phase sous des hypothèses analogues à celles formulées au chapitre 2. On suppose dans toute cette sous-section que l'hypothèse suivante est vérifiée :

$$\{z \in \mathbb{U}, \hat{J}(z) = 0\} = \{1\} \quad (3.21)$$

\hat{J} dégénère en un seul point du tore, à savoir en 1. (Pour des remarques sur la généralité de cette hypothèse, on pourra se reporter au chapitre 2.)

Lemme 38. *On suppose que J vérifie l'hypothèse (3.21). Soit A une matrice $d \times d$ réelle symétrique définie positive, $d_0 < d$ et $\varepsilon > 0$. On pose, pour $(\theta_1, \dots, \theta_d)$*

$$f(\theta_1, \dots, \theta_d) = \hat{J}(e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_d})$$

On rappelle que l'on a défini

$$\Phi_t(z) = \frac{1}{\hat{J}(z)} (1 - e^{-t\hat{J}(z)})$$

et

$$\Phi_\infty(z) = \frac{1}{\hat{J}(z)}.$$

On a les résultats suivants :

1. Si

$$\underline{\lim}_{x \rightarrow 0} f(x) \|Ax\|^{-d_0} \geq 1,$$

alors

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \|\Phi_t - \Phi_\infty\|_1 t^{\frac{d}{d_0} - 1} \leq \frac{1}{\det A} \frac{K_{d+1}}{2\pi} \Gamma\left(\frac{d}{d_0} - 1\right)$$

2. Si

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow 0} f(x) \|Ax\|^{-d_0} \leq 1,$$

alors

$$\underline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \|\Phi_t - \Phi_\infty\|_1 t^{\frac{d}{d_0} - 1} \geq \frac{1}{\det A} \frac{K_{d+1}}{2\pi} \Gamma\left(\frac{d}{d_0} - 1\right),$$

où les constantes K_d ont été calculées en (2.3).

Preuve : Comme les deux preuves sont identiques, nous allons uniquement prouver la première assertion. Supposons donc $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \|Ax\|^{-d_0} \geq 1$. Soit $\varepsilon > 0$: on peut trouver $\alpha < 1$ tel que

$$\|Ax\| \leq \alpha \implies f(x) \geq (1 - \varepsilon) \|Ax\|^{d_0}$$

D'après l'hypothèse (3.21), f ne s'annule pas sur l'adhérence de $[-\pi, \pi]^d \setminus A^{-1} B(0, \alpha)$, donc si l'on pose $b = \inf_{A^{-1} B(0, \alpha)} f$, on a $b > 0$ et

$$\|\Phi_t - t_\infty\|_1 = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{A^{-1} B(0, \alpha)} \frac{1}{f(x)} e^{-tf(x)} dx + O(e^{-bt})$$

On a

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{A^{-1} B(0, \alpha)} \frac{1}{f(x)} e^{-tf(x)} dx &= \frac{1}{(2\pi)^d} \frac{1}{\det A} \int_{B(0, \alpha)} \frac{1}{f(A^{-1}x)} e^{-tf(A^{-1}x)} dx \\ &\leq \frac{1}{(2\pi)^d} \frac{1}{\det A} \frac{1}{1 - \varepsilon} \int_{B(0, \alpha)} \frac{1}{\|x\|^{d_0}} e^{-t(1-\varepsilon)\|x\|^{d_0}} dx \end{aligned}$$

On fait le passage en coordonnées sphériques déjà effectué au chapitre 2 :

$$\begin{aligned} &\frac{1}{(2\pi)^d} \frac{1}{\det A} \frac{1}{1 - \varepsilon} \int_{B(0, \alpha)} \frac{1}{\|x\|^{d_0}} e^{-t(1-\varepsilon)\|x\|^{d_0}} dx \\ &= \frac{1}{(2\pi)^d} \frac{1}{\det A} \frac{1}{1 - \varepsilon} \int_{[0, \alpha] \times [-\pi, \pi]^{d-2} \times [-\pi, \pi]} e^{-t(1-\varepsilon)r^{d_0}} r^{d-1-d_0} \prod_{k=1}^{d-2} (\sin \theta_k)^{d-1-k} d\theta_1 \dots d\theta_{d-1} dr \\ &= \frac{1}{\det A} \frac{1}{1 - \varepsilon} \frac{K_{d+1}}{2\pi} \int_0^\alpha e^{-t(1-\varepsilon)r^{d_0}} r^{d-1-d_0} dr \end{aligned}$$

On fait le changement de variable $u = (1 - \varepsilon)r^{d_0}$, et on a

$$\begin{aligned} &\frac{1}{(2\pi)^d} \frac{1}{\det A} \frac{1}{1 - \varepsilon} \int_{B(0, \alpha)} \frac{1}{\|x\|^{d_0}} e^{-t(1-\varepsilon)\|x\|^{d_0}} dx \\ &= \frac{1}{\det A} \frac{K_{d+1}}{2\pi} \frac{1}{(1 - \varepsilon)^{\frac{d}{d_0}}} \frac{1}{t^{\frac{d}{d_0} - 1}} \int_0^{(1-\varepsilon)t\alpha^{d_0}} e^{-u} u^{\frac{d}{d_0} - 2} du \end{aligned}$$

De plus, on sait que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^{(1-\varepsilon)t\alpha^{d_0}} e^{-u} u^{\frac{d}{d_0} - 2} du = \Gamma\left(\frac{d}{d_0} - 1\right)$$

On en déduit

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \|\Phi_t - \Phi_\infty\|_1 t^{\frac{d}{d_0} - 1} \leq \frac{1}{\det A} \Gamma\left(\frac{d}{d_0} - 1\right) \frac{K_{d+1}}{2\pi} \frac{1}{(1 - \varepsilon)^{\frac{d}{d_0}}}$$

Comme $\varepsilon > 0$ est quelconque, on en déduit

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \|\Phi_t - \Phi_\infty\|_1 t^{\frac{d}{d_0} - 1} \leq \frac{1}{\det A} \Gamma\left(\frac{d}{d_0} - 1\right) \frac{K_{d+1}}{2\pi} \quad (3.22)$$

■

Théorème 3.7. *Soit J un potentiel. On suppose que $J \in A_a$, avec $a_n = 1 + 2^n n^n$ et $\eta > 0$. On pose, pour $(\theta_1, \dots, \theta_d)$*

$$f(\theta_1, \dots, \theta_d) = \hat{J}(e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_d})$$

On suppose que J vérifie l'hypothèse (3.21) et qu'il existe $A \in Gl_d(\mathbb{R})$ et $d_0 < d$ tels qu'on ait l'équivalent en zéro :

$$f(x) \sim \|Ax\|^{d_0}$$

Alors il existe des constantes K et L telles que, si $x \in B_{a,0}$ s'écrit $x = u + s$ avec $s \in \ker J$ et $\inf\{\hat{J}(z); z \in \text{spec } u\} > 0$, on a

$$K \leq \underline{\lim}_{t \rightarrow \infty} d(\mu_t^x, \tau_s \mu) t^{\frac{d}{d_0} - 1} \leq \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} d(\mu_t^x, \tau_s \mu) t^{\frac{d}{d_0} - 1} \leq L.$$

Preuve : On a

$$\begin{aligned} d(\mu_t^x, \tau_s \mu) &= d(\tau_s \tau_{e^{-t \frac{J}{2} u}} \mu_t^0, \tau_s \mu) \\ &= d(\tau_{e^{-t \frac{J}{2} u}} \mu_t^0, \mu) \end{aligned}$$

On en déduit

$$|d(\mu_t^x, \tau_s \mu) - d(\mu_t^0, \mu)| \leq d(\tau_{e^{-t \frac{J}{2} u}} \mu_t^0, \mu_t^0) \leq \|e^{-t \frac{J}{2}} d\|_{B_\alpha}$$

Or, on sait qu'il existe $c > 0$ tel que

$$\|e^{-t \frac{J}{2}} d\|_{B_\alpha} = O(e^{-ct}).$$

On en déduit que

$$\underline{\lim}_{t \rightarrow \infty} d(\mu_t^x, \tau_s \mu) t^{\frac{d}{d_0} - 1} = \underline{\lim}_{t \rightarrow \infty} d(\mu_t^0, \mu) t^{\frac{d}{d_0} - 1}$$

et

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} d(\mu_t^x, \tau_s \mu) t^{\frac{d}{d_0} - 1} = \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} d(\mu_t^0, \mu) t^{\frac{d}{d_0} - 1}.$$

En appliquant successivement le lemme 26 et la première partie du lemme 38, on voit qu'on peut prendre

$$K = M_2 \frac{1}{\det A} \frac{K_{d+1}}{2\pi} \Gamma\left(\frac{d}{d_0} - 1\right).$$

Montrons à présent la deuxième inégalité : d'après la deuxième partie du lemme 38, on voit qu'il suffit de montrer l'existence d'une constante $N > 0$ telle que

$$\forall t > 0 \quad d(\mu_t^0, \mu) \geq N \|\Phi_t - \Phi_\infty\|_1. \quad (3.23)$$

Posons $\sigma_\infty^2 = \|\Phi_\infty\|_1$ et $\sigma_t^2 = \|\Phi_t\|_1$. Remarquons tout d'abord que, comme $\Phi_\infty \geq \Phi_t$, on a

$$\|\Phi_t - \Phi_\infty\|_1 = \|\Phi_\infty\|_1 - \|\Phi_t\|_1 = \sigma_\infty^2 - \sigma_t^2.$$

Cette remarque évidente va se révéler importante par la suite. Soit $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^+)$, valant 1 pour $|x| \leq \frac{1}{4}\sigma_\infty$ et 0 pour $|x| \geq \frac{1}{2}\sigma_\infty$

On définit

$$g(s) = \mathbb{E}_{\mathcal{N}(0,s)} f = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi s}} \phi(x) e^{-\frac{x^2}{2s}} dx.$$

A présent, il est facile de choisir $H > 0$ tel que la fonction $f : B_\alpha \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = Hg(\pi_0(x))$$

appartienne à R_2 . Alors, on a

$$d(\mu_t^0, \mu) \geq \left| \int f d\mu_t^0 - \int f d\mu \right| = H |g(\sigma_t^2) - g(\sigma_\infty^2)|$$

La fonction g est dérivable au point $\sigma^2 > 0$, et l'on a

$$g'(\sigma^2) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \phi(x) e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} x^{-\frac{3}{2}} \left(-\frac{1}{2} + (\sigma^2)^{-1} x^2\right) dx.$$

Comme $-\frac{1}{2} + (\sigma^2)^{-1} x^2 \leq -\frac{1}{4}$ sur le support de ϕ et que ϕ est positive, et même strictement positive au voisinage de zéro, il s'ensuit que $g'(\sigma^2) < 0$. On a donc

$$|g(\sigma_t^2) - g(\sigma_\infty^2)| \sim |g'(\sigma^2)| |\sigma_t^2 - \sigma_\infty^2| = |g'(\sigma^2)| \|\Phi_t - \Phi_\infty\|_1,$$

ce qui implique (3.23). ■

Ce théorème donne de manière exacte la vitesse de convergence de la dynamique vers l'équilibre : elle est en

$$\frac{1}{t^{\frac{d}{d_0}-1}}.$$

3.6.3 Vitesse pour une condition initiale aléatoire

Nous n'avons jusque à présent énoncé nos résultats de convergence que pour des conditions initiales déterministes. Si on veut obtenir des résultats de vitesse de convergence vers μ_∞ pour des mesures initiales non déterministes, comme on a

$$\mu_t^\zeta = e^{-t\frac{J}{2}\zeta} * \mu_t^0,$$

le lemme 3.14 montre qu'il suffit de majorer

$$d(P_{e^{-t\frac{J}{2}\zeta}}, \text{Dirac}_0),$$

puisque l'on a d'ores et déjà été capable de majorer $d(\mu_t^0, \mu_\infty)$.

Dans un cadre où il y a absence de transition de phase et où $\|\zeta\|_E$ est intégrable, les inégalités

$$d(P_{e^{-t\frac{J}{2}\zeta}}, \text{Dirac}_0) \leq \mathbb{E}\|e^{-t\frac{J}{2}\zeta}\|_{B_a} \leq \mathbb{E}\|\zeta\|_{B_a} \|e^{-t\frac{J}{2}}\|_{A_a}$$

jointes au lemme 30 avec $\phi = \delta_0$ assurent une vitesse exponentielle.

Le résultat suivant, valable en présence de transition de phase, est nettement plus fin.

Théorème 3.8. *Soit $J \in A_a$ avec $a_n = 1 + 2^\alpha n^{|\alpha|}$. On suppose en outre que $\hat{J} \in C^{2k}(\mathbb{U}, \mathbb{C})$, où k est un entier vérifiant $2k > \alpha + \frac{d}{2}$. On suppose que $\|\zeta\|_{B_{a,0}}$ est intégrable et qu'il existe des réels K et ν strictement positifs tels que*

$$P(\Upsilon_J(\zeta) < x) \leq Kx^\nu.$$

Alors, on a

$$d(P_{e^{-t\frac{J}{2}\zeta}}, \text{Dirac}_0) = O\left(\left(\frac{\ln t}{t}\right)^\nu\right).$$

Preuve : Soit $f \in R_2$. On a pour tout $x > 0$:

$$\begin{aligned} |\mathbb{E}f(e^{-t\frac{J}{2}\zeta}) - f(0)| &= |\mathbb{E}(f(e^{-t\frac{J}{2}\zeta}) - f(0))\mathbb{1}_{\{\Upsilon_J(\zeta) < x\}} + \mathbb{E}(f(e^{-t\frac{J}{2}\zeta}) - f(0))\mathbb{1}_{\{\Upsilon_J(\zeta) \geq x\}}| \\ &\leq 2P(\Upsilon_J(\zeta) < x) + \mathbb{E}\|e^{-t\frac{J}{2}\zeta}\|_{B_a} \mathbb{1}_{\{\Upsilon_J(\zeta) \geq x\}} \\ &\leq 2Kx^\nu + K'_{J,k,p} \left(\frac{t}{2}\right)^{4k} e^{-\frac{tx}{2}} \mathbb{E}\|\zeta\|_{B_a} \end{aligned}$$

(La dernière égalité vient de la deuxième partie du lemme 35.)

On choisit de prendre $x = 2(4k + \nu)\frac{\ln t}{t}$: on a alors

$$|\mathbb{E}f(e^{-t\frac{J}{2}\zeta}) - f(0)| \leq 2K(2(4k + \nu))^\nu \left(\frac{\ln t}{t}\right)^\nu + \frac{K'_{J,k,p} \mathbb{E}\|\zeta\|_{B_a}}{2^{4k}} \frac{1}{t^\nu}.$$

Comme la majoration vaut pour tout $f \in R_2$, cela donne le résultat voulu.

■

3.7 Commentaires

Ainsi que nous l'avions annoncé, nous avons donc pu présenter les mesures de Gibbs extrémales – autrement dit les phases pures – comme limites temporelles d'un système infini d'équations différentielles stochastiques à condition initiale déterministe :

- L'unicité de la mesure de Gibbs au sein d'une certaine classe de mesures telle que celles considérées au chapitre 1 se traduit exactement par l'ergodicité de la dynamique stochastique gradient associée, autrement dit, l'absence de transition de phase correspond au cas où le système converge vers une limite indépendante des conditions initiales.

Ce procédé d'obtention des mesures de Gibbs comme limites temporelles d'un système dynamique stochastique à condition initiale fixée peut être vu comme complémentaire de la méthode classique d'obtention des mesures de Gibbs extrémales comme limites – spatiales, cette fois – de mesures indexées par une famille de conditions extérieures.

- Dans le cadre de la transition de phase, nous avons exhibé pour chaque phase pure un espace affine de conditions initiales pour lesquelles le système converge vers cette phase. En effet toute phase pure est de la forme $\tau_s \mu_\infty$, avec $s \in \ker J$, qui est limite des systèmes à condition initiale $u + s$, où u vérifie $\Upsilon_J(u) > 0$.

Nous avons de plus démontré que la présence ou l'absence de transition de phase avait une influence directe sur la vitesse de convergence du système stochastique : ainsi, la vitesse de convergence est exponentielle en l'absence de transition de phase et polynômiale en présence de transition de phase. Sous des hypothèses assez faibles, nous avons montré que l'ordre d_0 du zéro de \hat{J} détermine directement la vitesse de convergence, puisque celle-ci est en

$$\frac{1}{t^{\frac{d}{d_0}-1}}.$$

Ce phénomène n'est pas étonnant : nous avons déjà observé au chapitre 2 qu'en cas de transition de phase, la valeur de d_0 décidait de la vitesse de décroissance de la covariance. Nous pensons avoir ainsi montré l'importance du paramètre d_0 dans l'étude de cette famille de mesures de Gibbs, ce qui fait de d_0 un élément déterminant de la nature de la transition de phase.

En revanche, ce qui est nouveau, c'est que la vitesse de convergence du système permet de retrouver la valeur de d_0 : on se souvient en effet avoir démontré au chapitre 2, que pour $d_0 < \frac{d-1}{2}$, la vitesse de décroissance de la covariance ne dépendait plus de d_0 . Nous avons ainsi établi que la vitesse de convergence du système stochastique nous donne de meilleures informations

sur la nature de la transition de phase que ne le fait la vitesse de décroissance de la covariance des mesures de Gibbs.

Chapitre 4

Discrétisation du système gradient associé à une interaction quadratique et simulation

L'objet de ce chapitre est d'étudier une discrétisation du système différentiel stochastique étudié au chapitre précédent afin de construire un algorithme à pas décroissants permettant de simuler le comportement asymptotique en temps du système stochastique.

Dans un premier temps, nous allons décrire une chaîne de Markov inhomogène à temps discret ayant un comportement asymptotique similaire au système à temps continu : l'état de la chaîne de Markov au temps discret n pourra être considérée comme une approximation de l'état du système continu à l'instant

$$t_n = \sum_{k=0}^{n-1} h_k,$$

où $(h_n)_{n \geq 0}$ est la suite des pas de l'algorithme. Nous donnerons des indications sur la manière de choisir la suite $(h_n)_{n \geq 0}$ afin d'obtenir la convergence la plus rapide possible. En effet, il y a un compromis à faire : il faut que la série $\sum_k h_k$ diverge assez vite pour que le temps simulé t_n grandisse assez vite, mais si les pas h_n sont trop grands, le système discret s'écarte du système continu.

Dans un second temps, nous allons mettre concrètement en œuvre l'algorithme sur ordinateur pour une interaction aux plus proches voisins. Nous constaterons *de visu* – et cela conformément aux prédictions théoriques – que le comportement asymptotique du système dépend fortement de la condition

initiale en cas de transition de phase, tandis que ce comportement est ergodique – au sens qu'il y a oubli de la condition initiale – en l'absence de transition de phase.

4.1 Discrétisation du système

Nous voulons maintenant donner une discrétisation du système différentiel stochastique qui permette d'approcher la ou les mesures de Gibbs limite. On se place naturellement sous des hypothèses ayant permis l'obtention au chapitre 3 d'une étude approfondie du système : on choisit $B_{p,0}$ comme espace d'états du système discret et l'on suppose que $J \in B_p$. Comme précédemment, nous préciserons ultérieurement les résultats obtenus pour les poids déjà étudiés.

L'équation différentielle stochastique

$$X_t = \zeta + W_t - \frac{1}{2} \int_0^t JX_s ds, \quad t \in \mathbb{R}^+,$$

peut s'écrire aussi

$$X_t - X_u = -\frac{1}{2} \int_u^t JX_s ds + (W_t - W_u), \quad 0 < u < t,$$

avec la condition initiale $X_0 = \zeta$; ce qui incite à discrétiser en temps l'équation par la récurrence suivante :

$$X_{n+1} - X_n = -\frac{h_n}{2} JX_n + \sqrt{h_n} \eta_n, \quad (4.1)$$

avec la condition initiale $X_0 = \zeta$ que l'on prendra dans ce chapitre toujours déterministe.

On a $\eta_n = (\eta_n^k)_{k \in \mathbb{Z}^d}$ où les η_n^k sont des variables aléatoires normales centrées réduites indépendantes.

Nous cherchons à choisir judicieusement la suite des pas $(h_n)_{n \geq 0}$ afin d'obtenir la convergence en loi de X_n le plus rapidement possible. Dans tout ce chapitre, on supposera toujours – sans nécessairement le rappeler – que $(h_n)_{n \geq 0}$ vérifie les hypothèses suivantes :

1. La suite h_n est positive et tend vers zéro.
2. La série $\sum_{n \geq 0} h_n$ est divergente.

Comme B_p vérifie les hypothèses (\mathcal{H}_0) , on peut écrire l'équation (4.1) sous la forme du système aléatoire d'équations aux différences finies équivalent :

$$X_{n+1}^k - X_n^k = -\frac{h_n}{2} \sum_{i \in \mathbb{Z}^d} J(k-i) X_n^i + \sqrt{h_n} \eta_n^k \quad (4.2)$$

On notera dans toute la suite

$$t_n = \sum_{k=0}^n h_k.$$

t_n a la dimension du temps. Dès lors, comment choisir la suite h_n ? Deux phénomènes s'opposent : plus h_n est grand, plus le temps t_n est grand, mais si le pas h_n est trop grand l'approximation faite en discrétisant est trop grossière et l'on s'écarte de la solution de l'e.d.s.

On utilisera ici alternativement deux hypothèses supplémentaires sur la suite h_n .

- (l_2) La série $\sum_{n \geq 0} h_n^2$ est convergente.
- (M) $h_n = \frac{1}{n^\gamma}$, avec $\gamma \in]0, 1[$.

Deux paramètres interviennent dans le choix de (h_n) : la vitesse de décroissance de l'interaction (condition du type $J \in A_a$) et l'ordre des zéros de \hat{J} – voire leur inexistence.

4.2 Comportement asymptotique à condition initiale nulle

4.2.1 Convergence du système

Théorème 4.1. *Soit $J \in A_a$ un potentiel pour lequel il existe au moins une mesure de Gibbs. La suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \geq 0}$ est définie par $X_0 = 0$ et la récurrence (4.2). On suppose en outre que la suite des pas $(h_n)_{n \geq 0}$ vérifie (l_2) ou (M). Alors, la suite X_n est à valeurs dans B_p et on a*

$$P_{X_n} \Rightarrow \mu_\infty,$$

où μ_∞ est la mesure gaussienne centrée de densité spectrale $\frac{1}{j}$ et où la convergence en loi s'entend au sens de la topologie de B_a .

On va s'appuyer sur quelques lemmes.

Lemme 39. *Soit $(Z^k)_{k \in \mathbb{Z}^d}$ un processus gaussien stationnaire centré de mesure spectrale ν . On pose*

$$\forall k \in \mathbb{Z}^d \quad Y^k = \sum_{j \in \mathbb{Z}^d} J(k-j) Z^j = (J * Z)(k)$$

Alors, pour tout n la série définissant Y^n converge presque sûrement et (Y^n) est un processus gaussien stationnaire de mesure spectrale $|\hat{J}|^2\nu$, où l'on a posé

$$\hat{J}(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} J(n)z^n. \quad (4.3)$$

Preuve : Pour $n \in \mathbb{Z}^d$, on a

$$\mathbb{E} \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} |J(n-k)Z^k| \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} |J(k)|\mathbb{E}|Z^0| < +\infty,$$

ce qui entraîne que, presque sûrement, la série $\sum_{k \in \mathbb{Z}^d} J(n-k)Z^k$ converge absolument est donc que Y^n est bien définie. On a donc

$$Y^n Y^p = \sum_{k, l \in \mathbb{Z}^d} J(n-k)J(p-l)Z^k Z^l$$

Mais la fonction $(\omega, k, l) \mapsto J(n-k)J(p-l)Z^k Z^l$ est intégrable par rapport au produit de P par la mesure de comptage sur $(\mathbb{Z}^d)^2$, puisque

$$|J(n-k)J(p-l)Z^k Z^l| \leq |J(n-k)J(p-l)| \frac{1}{2}((Z^k)^2 + (Z^l)^2)$$

Donc l'intégrale par rapport à la mesure produit est majorée par

$$\left(\sum_{n \in \mathbb{Z}^d} |J(n)| \right)^2 \mathbb{E}(Z^0)^2.$$

D'après le théorème de Fubini, on a donc

$$\begin{aligned} \mathbb{E} Y^n Y^p &= \sum_{k, l \in \mathbb{Z}^d} J(n-k)J(p-l) \mathbb{E} Z^k Z^l \\ &= \sum_{k, l \in \mathbb{Z}^d} J(n-k)J(p-l) \int_{\mathbb{U}} z^{k-l} d\nu(z) \\ &= \int_{\mathbb{U}} \sum_{k, l \in \mathbb{Z}^d} J(n-k)z^{k-n} J(p-l)z^{p-l} z^{n-p} d\nu(z) \\ &= \int_{\mathbb{U}} |\hat{J}(z)|^2 z^{n-p} d\nu(z) \end{aligned}$$

■

On en déduit aisément le fait suivant : Pour tout n X_n est un processus gaussien stationnaire admettant une densité spectrale $u_n(z)$ fournie par la récurrence suivante : u_0 vaut 0 (c'est la densité spectrale de X_0) et

$$\forall z \in \mathbb{U}, u_{n+1}(z) = \left(1 - \frac{h_n}{2} \hat{J}(z)\right)^2 u_n(z) + h_n \quad (4.4)$$

Comme $\frac{1}{\hat{J}}$ est intégrable $\lambda(\{\hat{J} = 0\}) = 0$. On peut donc poser $v_n = u_n - \frac{1}{\hat{J}}$. On a alors

$$v_{n+1} = v_n \left(1 - \frac{h_n \hat{J}}{2}\right)^2 + \frac{h_n^2}{4} \hat{J} \quad (4.5)$$

$$= v_n \left(1 - h_n \hat{J} \left(1 - \frac{h_n \hat{J}}{4}\right)\right) + \frac{h_n^2}{4} \hat{J} \quad (4.6)$$

On utilise aussi le lemme qui suit

Lemme 40. *Soit $\beta > 0$ tel que*

$$\beta < \frac{1}{\sup_{n \geq 0} h_n}.$$

Soient (w_n) et (ε_n) deux suites positives telles que

$$\forall n \geq 0 \quad w_{n+1} \leq (1 - \beta h_n) w_n + \varepsilon_n$$

Alors

$$\forall n \geq 0 \quad w_{n+1} \leq w_0 \exp(-\beta t_n) + \exp(-\beta t_n) \sum_{k=0}^n \exp(\beta t_k) \varepsilon_k$$

Preuve : On pourra se rapporter à l'ouvrage de Duflo [16], p. 144.

■

Nous allons maintenant nous attacher à montrer la convergence dans L^1 de u_n vers $\frac{1}{\hat{J}}$, ce qui, d'après le lemme 26, entraînera la convergence en loi désirée.

On note $\|\hat{J}\|_\infty = \sup\{\hat{J}(z); z \in \mathbb{U}\}$. Soit κ vérifiant $0 < \kappa < 1$ et $p \geq 0$ tel que $\forall n \geq p \quad \frac{h_n \|\hat{J}\|_\infty}{4} \leq \kappa$.

D'après (4.6), on a, pour tout $n \geq p$

$$|v_{n+1}| \leq |v_n| \left(1 - \hat{J}(z)(1 - \kappa)h_n\right) + \frac{\hat{J}(z)}{4} h_n^2$$

Si l'on pose $\varepsilon_n = \frac{\hat{J}(z)}{4} h_n^2$ et $\beta = \hat{J}(z)(1 - \kappa)$, on peut alors appliquer le lemme 40 à partir du rang p , et l'on a alors $\forall n \geq p$

$$|v_{n+1}(z)| \leq |v_p(z)| \exp(-\hat{J}(z)(1-\kappa)(t_n - t_{p-1})) + \frac{\hat{J}(z)}{4} \sum_{k=p}^n \exp(\hat{J}(z)(1-\kappa)(t_k - t_n)) h_k^2 \quad (4.7)$$

1. Sous l'hypothèse (l_2) , cela entraîne

$$\forall n \geq p \quad |v_{n+1}(z)| \leq |v_p(z)| + K_1 \hat{J}(z) \quad (4.8)$$

où $K_1 = \frac{1}{4} \sum_{k \geq p} h_k^2$. Montrons que v_n tend presque partout vers 0. Soit z tel que $\hat{J}(z) > 0$. Il est facile de voir que le premier terme de la somme du membre de droite de l'équation (4.7) tend vers zéro. Reste à voir que

$$\sum_{k=p}^n \exp(\hat{J}(z)(1-\kappa)(t_k - t_n)) h_k^2$$

tend vers 0. Posons $d_{n,k} = \exp(\hat{J}(z)(1-\kappa)(t_k - t_n)) h_k^2$ pour $k \leq n$ et $d_{n,k} = 0$ si $k > n$: on a

$$\forall n \geq p, \quad \sum_{k=p}^n \exp(\hat{J}(z)(1-\kappa)(t_k - t_n)) h_k^2 = \sum_{k=p}^{+\infty} d_{n,k}.$$

À k fixé, on a $\lim_{n \rightarrow \infty} d_{n,k} = 0$. Mais

$$\forall n, k \geq p \quad |d_{n,k}| \leq h_k^2.$$

Comme la suite h_k^2 est sommable, le théorème de convergence dominée pour la mesure de comptage nous dit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_{n+1} = 0.$$

Le théorème de convergence dominée pour la mesure de Haar sur \mathbb{U} montre alors que u_n converge en moyenne d'ordre 1 vers $\frac{1}{j}$, ce qui achève la preuve sous l'hypothèse (l_2) .

2. Sous l'hypothèse (M) , la preuve est plus délicate.

On pose

$$t_{n,\gamma} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\gamma} \quad (4.9)$$

Le lemme suivant est fondamental.

Lemme 41.

$$\forall \eta \in]0, 1[\quad \forall S > 0 \quad \exists K_1, K_2 \geq 0 \quad \forall \beta \in]0, S] \quad \forall n \geq 0$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^{2\gamma}} \exp(\beta(t_{k,\gamma} - t_{n,\gamma})) \leq \frac{1}{\beta} \left(K_1 \exp(-(1-\eta)\beta \frac{n^{1-\gamma}}{1-\gamma}) + \frac{K_2}{n^\gamma} \right)$$

Preuve :

Tout d'abord, une comparaison série-intégrale donne facilement

$$\forall n \geq 0, k \geq 1 \quad t_{n,\gamma} - t_{k,\gamma} \geq \frac{1}{1-\gamma} ((n+1)^{1-\gamma} - (k+1)^{1-\gamma}). \quad (4.10)$$

Soit $r \in]0, 1[$. Nous allons couper la somme en deux, par

$$\sum_{k=1}^n = \sum_{k=1}^{[rn]-1} + \sum_{k=[rn]}^n$$

$$\sum_{k=1}^{[rn]-1} \frac{1}{k^{2\gamma}} \exp(\beta(t_{k,\gamma} - t_{n,\gamma})) \leq \left(\sum_{k=1}^{[rn]-1} \frac{1}{k^{2\gamma}} \right) \exp(\beta(t_{[rn]-1}^\gamma - t_{n,\gamma}))$$

On a, d'une part $\exp(\beta(t_{[rn]-1}^\gamma - t_{n,\gamma})) \leq \exp(-\frac{\beta}{1-\gamma}(1-r^{1-\gamma})n^{1-\gamma})$.
D'autre part, en appliquant l'inégalité de Hölder aux suites 1 et $k^{-2\gamma}$ avec $p = \frac{1}{\gamma}$, on obtient

$$\sum_{k=1}^{[rn]-1} \frac{1}{k^{2\gamma}} \leq \left(\frac{\pi^2}{6} \right)^\gamma (rn)^{1-\gamma}$$

Soit $\delta > 0$

$$(rn)^{1-\gamma} = \frac{1-\gamma}{\beta\delta} \frac{\beta}{1-\gamma} \delta (rn)^{1-\gamma} \leq \frac{1-\gamma}{\beta\delta} \exp\left(\frac{\beta}{1-\gamma} \delta (rn)^{1-\gamma}\right)$$

On en déduit

$$\sum_{k=1}^{[rn]-1} \frac{1}{k^{2\gamma}} \exp(\beta(t_{k,\gamma} - t_{n,\gamma})) \leq \left(\frac{\pi^2}{6} \right)^\gamma \frac{1-\gamma}{\beta\delta} \exp\left(-\frac{\beta}{1-\gamma}(1-(1+\delta)r^{1-\gamma})n^{1-\gamma}\right) \quad (4.11)$$

On prend par exemple $\delta = 1$ et r tel que $2r^{1-\gamma} = \eta$ et l'on pose $K_1 = \left(\frac{\pi^2}{6}\right)^\gamma (1-\gamma)$.

Étudions à présent l'autre terme. On suppose dans un premier temps que l'on a $n \geq \frac{1}{r}$.

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=[rn]}^n \frac{1}{k^{2\gamma}} \exp(\beta(t_{k,\gamma} - t_{n,\gamma})) \\
& \leq \frac{1}{[rn]^{2\gamma}} \sum_{k=[rn]}^n \exp\left(\frac{\beta}{1-\gamma}((k+1)^{1-\gamma} - (n+1)^{1-\gamma})\right) \\
& \leq \frac{1}{[rn]^{2\gamma}} \sum_{k=0}^{n-[rn]} \exp\left(\frac{\beta}{1-\gamma}((n-k+1)^{1-\gamma} - (n+1)^{1-\gamma})\right) \\
& \leq \frac{1}{[rn]^{2\gamma}} \sum_{k=0}^{n-[rn]} \exp\left(\frac{\beta}{1-\gamma}(n+1)^{1-\gamma}\left(1 - \frac{k}{n+1}\right)^{1-\gamma} - 1\right)
\end{aligned}$$

Comme la fonction $x \mapsto x^{1-\gamma}$ est concave, on a

$$\forall x \in [0, 1] \quad (1-x)^{1-\gamma} - 1 \leq -(1-\gamma)x.$$

On en déduit

$$\begin{aligned}
\sum_{k=[rn]}^n \frac{1}{k^{2\gamma}} \exp(\beta(t_{k,\gamma} - t_{n,\gamma})) & \leq \frac{1}{[rn]^{2\gamma}} \sum_{k=0}^{n-[rn]} \exp(-\beta(n+1)^{-\gamma}k) \\
& \leq \frac{1}{[rn]^{2\gamma}} \sum_{k=0}^{+\infty} \exp(-\beta(n+1)^{-\gamma}k) \\
& \leq \frac{1}{[rn]^{2\gamma}} (1 - \exp(-\beta(n+1)^{-\gamma}))^{-1}
\end{aligned}$$

Comme $x \mapsto 1 - \exp(-x)$ est concave et que l'on a $\beta(n+1)^{-\gamma} \leq S$, si l'on pose $K_S = \frac{1 - \exp(-S)}{S} > 0$, on a

$$(1 - \exp(-\beta(n+1)^{-\gamma})) \geq K_S \beta(n+1)^{-\gamma}$$

D'autre part, à r fixé, on peut trouver une constante C_r telle que

$$\forall n \geq \frac{1}{r} \quad \frac{n+1}{[rn]^2} \leq \frac{C_r}{n}$$

On a alors

$$\begin{aligned} \sum_{k=[rn]}^n \frac{1}{k^{2\gamma}} \exp(\beta(t_{k,\gamma} - t_{n,\gamma})) &\leq \frac{1}{[rn]^{2\gamma}} (1 - \exp(-\beta(n+1)^{-\gamma}))^{-1} \\ &\leq \frac{1}{\beta K_S} \left(\frac{n+1}{rn-1} \right)^\gamma \\ &\leq \frac{1}{\beta} \frac{C_r^\gamma}{K_S} \frac{1}{n^\gamma} \end{aligned}$$

Maintenant, si $n \leq \frac{1}{r}$, on a de toute évidence

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^{2\gamma}} \exp(\beta(t_{k,\gamma} - t_{n,\gamma})) \leq \sum_{k=1}^{[1/r]} \frac{1}{k^{2\gamma}}$$

On voit donc qu'on peut poser

$$K_2 = \max\left(Sr^{-\gamma} \sum_{k=1}^{[1/r]} \frac{1}{k^{2\gamma}}, \frac{C_r^\gamma}{K_S}\right)$$

et que l'on a alors l'inégalité désirée.

■

On peut alors prouver la convergence du système. L'inégalité (4.7) reste valable. On applique alors le lemme 41 avec $\beta = \hat{J}(z)(1 - \kappa)$ et $S = \|\hat{J}\|_\infty(1 - \kappa)$. On obtient $\forall n \geq p \quad \forall \theta | \hat{J}(z) \neq 0$

$$\begin{aligned} |v_{n+1}(z)| &\leq |v_p(z)| \exp(-\hat{J}(z)(1 - \kappa) \frac{(n+1)^{1-\gamma} - p^{1-\gamma}}{1 - \gamma}) \\ &\quad + \frac{K_1}{4(1 - \kappa)} \exp(-(1 - \eta)(1 - \kappa) \hat{J}(z) \frac{n^{1-\gamma}}{1 - \gamma}) \\ &\quad + \frac{K_2}{4(1 - \kappa)} \frac{1}{n^\gamma} \end{aligned}$$

Il est facile de voir qu'il existe des constantes A' et B' indépendantes de v_0 telles que

$$\forall z \in \mathbb{U} \quad |v_p(z)| \leq A'|v_0(z)| + B'$$

On en déduit que pour tout $c \in]0, 1[$, il existe des constantes A, B, C indépendantes de v_0 telles que

$$\forall n \geq 0 \quad \forall z \in \mathbb{U} | \hat{J}(z) \neq 0 \quad |v_n| \leq (A+B|v_0|) \exp(-(1-c)\hat{J}(z) \frac{n^{1-\gamma}}{1-\gamma}) + \frac{C}{n^\gamma} \quad (4.12)$$

Il ne reste plus qu'à appliquer le théorème de convergence dominée pour constater que u_n converge en moyenne d'ordre 1 vers $\frac{1}{j}$. La convergence en loi s'ensuit grâce au lemme 26.

■

4.2.2 Vitesse de convergence

En l'absence de transition de phase

Théorème 4.2. *On note μ_n la loi de la variable aléatoire X_n définie par $X_0 = 0$ et la récurrence (4.1). On note μ_∞ la loi gaussienne centrée de densité spectrale $\frac{1}{j}$. On suppose que \hat{J} ne s'annule pas sur \mathbb{U} , ou, de manière équivalente*

$$a = \inf_{z \in \mathbb{U}} \hat{J} > 0.$$

On suppose que la suite h_n s'écrit $h_n = \frac{\kappa}{n}$, avec $\kappa \geq \frac{4}{a}$ ou $h_n = \frac{\kappa}{n^\gamma}$, avec $\gamma \in]0, 1[$ et $\kappa > 0$. Alors

$$d(\mu_n, \mu_\infty) = O(h_n).$$

Preuve : On va en fait montrer le résultat sous les hypothèses plus générales suivantes : il existe un entier n_0 , un réel $M > 0$ et une fonction $\phi \in C^1([n_0, +\infty[)$ satisfaisant à :

1. $\forall n \geq n_0 \quad h_n = \frac{1}{\phi(n)}$.
2. ϕ est croissante de limite $+\infty$.
3. $\forall n \geq n_0 \quad \phi(n+1) \leq M\phi(n)$
4. $\forall x \in [n_0, +\infty[\quad \phi'(x) \leq \frac{a}{4}$

On peut toujours supposer que l'on a $h_{n_0} \leq \frac{2a}{\|\hat{J}\|_\infty}$. D'après le lemme 40, on a pour tout $n \geq n_0$

$$\|v_{n+1}\|_1 \leq \|v_{n_0}\|_1 \exp\left(-\frac{a}{2}(t_n - t_{n_0-1})\right) + \frac{\|\hat{J}\|_\infty}{4} \sum_{k=n_0}^n \exp\left(\frac{a}{2}(t_k - t_n)\right) h_k^2 \quad (4.13)$$

Posons

$$F(t) = \int_{n_0}^t \frac{dt}{\phi(t)}$$

et

$$g(t) = \exp\left(\frac{a}{2}F(t)\right) \frac{1}{\phi(t)^2}.$$

On a

$$\frac{g'(t)}{g(t)} = \frac{a}{2} \frac{1}{\phi(t)} - 2 \frac{\phi'(t)}{\phi(t)} \geq 0$$

Ainsi g est une fonction croissante. Ainsi pour tout $n \geq n_0$, on a

$$\exp\left(-\frac{a}{2}(t_n - t_{n_0-1})\right) \leq \exp\left(-\frac{a}{2}F(n+1)\right) = \frac{h_{n+1}^2}{g(n+1)} \leq \frac{h_{n_0+1}^2}{g(n_0+1)}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=n_0}^n \exp\left(\frac{a}{2}(t_k - t_n)\right) h_k^2 &\leq \sum_{k=n_0}^n \exp\left(\frac{a}{2}(F(k+1) - F(n+1))\right) h_k^2 \\ &\leq M^2 \exp\left(-\frac{a}{2}F(n+1)\right) \sum_{k=n_0}^n \exp\left(\frac{a}{2}F(k+1)\right) h_{k+1}^2 \\ &\leq M^2 \exp\left(-\frac{a}{2}F(n+1)\right) \int_{n_0+1}^{n+2} g(t) dt \end{aligned}$$

Posons

$$I = \int_{n_0+1}^{n+2} g(t) dt.$$

Une intégration par parties donne

$$I = \left[\exp\left(\frac{a}{2}F\right) \frac{2}{a} \frac{1}{\phi}\right]_{n_0+1}^{n+2} + \int_{n_0+1}^{n+2} \exp\left(\frac{a}{2}F(t)\right) \frac{2}{a} \frac{\phi'(t)}{\phi^2(t)}$$

Mais, comme $\phi' \leq \frac{a}{4}$, on a

$$I \leq \exp\left(\frac{a}{2}F(n+2)\right) \frac{2}{a} \frac{1}{\phi(n+2)} + \frac{1}{2} \int_{n_0+1}^{n+2} \exp\left(\frac{a}{2}F(t)\right) \frac{1}{\phi^2(t)},$$

soit

$$I \leq \exp\left(\frac{a}{2}F(n+2)\right) \frac{2}{a} \frac{1}{\phi(n+2)} + \frac{1}{2} I.$$

On a donc

$$\begin{aligned} \sum_{k=n_0}^n \exp\left(\frac{a}{2}(t_k - t_n)\right) h_k^2 &\leq \frac{4M^2}{a} \exp\left(\frac{a}{2}F(n+2) - F(n+1)\right) h_{n+2} \\ &\leq \frac{4M^2}{a} \exp\left(\frac{a}{2}h_{n+1}\right) h_{n+2} \\ &\leq \frac{4M^2}{a} \exp\left(\frac{a}{2}h_{n_0+1}\right) h_{n+1} \end{aligned}$$

Ainsi, pour $n > n_0$, on a

$$\|v_n\|_1 \leq Nh_n,$$

où l'on a posé

$$N = \frac{h_{n_0+1}}{g(n_0+1)} \|v_{n_0}\|_1 + \frac{4M^2}{a} \exp\left(\frac{a}{2}h_{n_0+1}\right),$$

ce qui en vertu du lemme 26 achève la preuve.

■

Ainsi, on voit que dans l'échelle des suites de la forme $h_n = \frac{\kappa}{n^\gamma}$, avec $\gamma \in]0, 1[$, le choix qui permet d'assurer la plus grande rapidité de convergence est obtenu pour $\gamma = 1$ et κ suffisamment grand. On voit que dans ce cas la liberté de choix de κ ($\kappa \geq \frac{4}{a}$) décroît lorsque le trou spectral a diminue, ce qui est naturel.

En présence de transition de phase

Nous allons voir que l'on peut obtenir une majoration de la vitesse de convergence en faisant certaines hypothèses sur \hat{J} analogues à celles faites aux chapitres 1 et 2. Nous faisons ici le choix de prendre une suite de pas $(h_n)_{n \geq 0}$ de type $\frac{1}{n^\gamma}$. Sous ces hypothèses, nous déterminerons quelle valeur de $\gamma \in]0, 1[$ assure la convergence asymptotique la plus rapide.

Théorème 4.3. *Pour la suite $h_n = \frac{1}{n^\gamma}$, on note μ_n la loi de la variable aléatoire X_n définie par $X_0 = 0$ et la récurrence (4.1). On note μ_∞ la loi gaussienne centrée de densité spectrale $\frac{1}{f}$. On pose, pour $(\theta_1, \dots, \theta_d)$*

$$f(\theta_1, \dots, \theta_d) = \hat{J}(e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_d})$$

On suppose que f s'annule en un unique point x_0 de $] -\pi, \pi]^d$ et qu'il existe $d_0 < d$ tel que

$$\underline{\lim}_{x \rightarrow x_0} f(x) |x - x_0|^{-d_0} > 0.$$

Alors, on a

$$d(\mu_n, \mu_\infty) = O(n^{-\tau}),$$

où l'on a posé $\tau = \inf((1 - \gamma)(\frac{d}{d_0} - 1), \gamma)$.

τ est maximal pour le choix de $\gamma = 1 - \frac{d_0}{d}$, on a

$$\tau = 1 - \frac{d_0}{d},$$

de sorte que

$$d(\mu_n, \mu_\infty) = O\left(\frac{1}{(t_{n,\gamma})^{\frac{d}{d_0}-1}}\right).$$

Preuve :

Quitte à faire une translation sur l'intervalle d'intégration dans ce qui suit, on peut supposer que l'on a $x_0 = 0$. On en déduit l'existence d'une constante $m > 0$ telle que $\forall x \in [-\pi, +\pi]^d \quad f(x) \geq m|x|^{d_0}$.

De (4.12), on déduit l'existence de A, B, C, D indépendantes de v_0 tels que

$$\|v_n\|_1 \leq \int_{[-\pi, \pi]^d} (A + B|v_0|) \exp(-D|\theta|^{d_0} n^{1-\gamma}) d\theta + \frac{C}{n^\gamma}.$$

On note $K = \|1 - u_0 \hat{J}\|_\infty = \|v_0 \hat{J}\|_\infty$. On a

$$\|v_n\|_1 \leq \int_{[-\pi, \pi]^d} (A + K \frac{B/m}{|\theta|^{d_0}}) \exp(-D|\theta|^{d_0} n^{1-\gamma}) d\theta + \frac{C}{n^\gamma}.$$

D'où

$$\|v_n\|_1 \leq \int_{B(0, \pi\sqrt{d})} (A + K \frac{B/m}{|\theta|^{d_0}}) \exp(-D|\theta|^{d_0} n^{1-\gamma}) d\theta + \frac{C}{n^\gamma}.$$

On fait un passage en coordonnées polaires

$$\|v_n\|_1 \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi\sqrt{d}} (A + K \frac{B/m}{r^{d_0}}) \exp(-Dr^{d_0} n^{1-\gamma}) r^{d-1} dr + \frac{C}{n^\gamma}.$$

On fait le changement de variables $r = tn^{\frac{\gamma-1}{d_0}}$. On obtient

$$\|v_n\|_1 \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{n^{\frac{1-\gamma}{d_0} \pi\sqrt{d}}} (A \frac{t^{d-1}}{n^{(1-\gamma)\frac{d}{d_0}}} + K \frac{B}{m} \frac{t^{d-d_0-1}}{n^{(1-\gamma)(\frac{d}{d_0}-1)}}) \exp(-Dt^{d_0}) dt + \frac{C}{n^\gamma}.$$

On pose alors

$$C_1 = \frac{A}{2\pi} \int_0^{+\infty} t^{d-1} \exp(-Dt^{d_0}) dt$$

et

$$C_2 = \frac{B}{2\pi m} \int_0^{+\infty} t^{d-d_0-1} \exp(-Dt^{d_0}) dt.$$

On a alors

$$\|v_n\|_1 \leq \frac{C_1}{n^{(1-\gamma)\frac{d}{d_0}}} + \|u \hat{J} - 1\|_\infty \frac{C_2}{n^{(1-\gamma)(\frac{d}{d_0}-1)}} + \frac{C}{n^\gamma}. \quad (4.14)$$

La deuxième assertion découle alors du lemme 26.

■

Remarque La dernière équation peut s'écrire

$$\|v_n\|_1 \leq \frac{1}{(t_{n,\gamma})^{\frac{d}{d_0}-1}} (C'_2 \|u\hat{J} - 1\|_\infty + \frac{C'_1}{t_{n,\gamma}}) + \frac{C}{n^\gamma} \quad (4.15)$$

Le premier terme de la somme semble correspondre avec la vitesse du système stochastique pour lequel on avait une vitesse en $\frac{1}{t^{\frac{d}{d_0}-1}}$ et le second terme au pas h_n de l'approximation.

4.3 Influence de la condition initiale

Lors de l'étude de l'équation différentielle stochastique, l'écriture

$$X_t = e^{-t\frac{J}{2}}\zeta + W_t - \frac{J}{2} \int_0^t e^{-(t-s)\frac{J}{2}} W_s ds$$

nous avait permis d'écrire X_t comme la somme d'un terme purement stochastique indépendant de la condition initiale et d'un terme déterministe ne dépendant que de la condition initiale. Le lemme suivant montre qu'on peut faire de même ici.

Lemme 42. *Pour $x \in B_p$ et $J \in A_p$, notons $X^{(x)}$ la suite définie par $X_0^{(x)} = x$ et la récurrence*

$$X_{n+1}^{(x)} - X_n^{(x)} = -\frac{h_n}{2} J X_n^{(x)} + \sqrt{h_n} \eta_n, \quad (4.16)$$

Alors, $X^{(x)}$ admet la décomposition

$$X_n^{(x)} = e_n^{(x)} + X_n^{(0)},$$

où la suite déterministe $e^{(x)}$ est déterminée par la récurrence $e_0^{(x)} = x$ et

$$e_{n+1}^{(x)} - e_n^{(x)} = -\frac{h_n}{2} J e_n^{(x)}, \quad (4.17)$$

soit

$$e_n^{(x)} = \prod_{k=0}^{n-1} (Id - \frac{h_k}{2} J) x \quad (4.18)$$

Preuve : La preuve étant immédiate, c'est plutôt un commentaire : à ω fixé, l'équation de récurrence est une équation affine. Classiquement, on exprime toute solution comme somme de la solution de l'équation linéaire

associée avec la même condition initiale x et de la solution de l'équation affine à condition initiale nulle.

■

Puisque le terme stochastique $X_n^{(0)}$ a été étudié à la section précédente, il ne nous reste plus qu'à étudier la partie déterministe. Nous nous sommes placés comme au chapitre 3 dans les espaces B_p : dans les cas où nous avons su prévoir le comportement du modèle continu, nous voulons obtenir pour le système discret le même type de résultats.

Lemme 43. *Soit \mathcal{A} une algèbre de Banach dont on note e l'élément neutre pour la multiplication, $(h_n)_{n \geq 0}$ une suite à termes positifs de limite nulle et $J \in \mathcal{A}$. Si l'on a noté*

$$t_n = \sum_{k=0}^{n-1} h_k,$$

on peut définir une suite $(U_n)_{n \geq 0}$ d'éléments de \mathcal{A} vérifiant

$$\prod_{k=0}^{n-1} (e - \frac{h_k}{2} J) = U_n \exp(-\frac{t_n}{2} J).$$

On a les résultats suivants :

1. Si $\sum_{k \geq 0} h_k^2 < +\infty$, alors U_n converge dans \mathcal{A} vers un élément U .
2. Si $\sum_{k \geq 0} h_k^2 = +\infty$, alors il existe des constantes $K, L > 0$ telles que

$$\forall n \geq 0, \quad \|U_n\| \leq L \exp(K \sum_{k=0}^{n-1} h_k^2) \quad (4.19)$$

Preuve : On a évidemment

$$U_n = \exp(\frac{t_n}{2} J) \prod_{k=0}^{n-1} (e - \frac{h_k}{2} J) = \prod_{k=0}^{n-1} (e - \frac{h_k}{2} J) \exp(\frac{h_k}{2} J) \quad (4.20)$$

Mais on sait que pour $\|x\| < 1$, on a

$$\exp(\ln(e + x)) = e + x,$$

où l'on a posé

$$\ln(e + x) = \sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k.$$

Si p est tel que pour $n \geq p$, on a $\frac{h_n}{2}\|J\| < 1$, alors pour $n \geq p$, on a

$$U_n = U_p \exp \sum_{k=p}^{n-1} \left(\frac{h_k}{2} J + \ln \left(e - \frac{h_k}{2} J \right) \right)$$

Mais

$$\begin{aligned} \|\ln(e+x) - x\| &= \left\| \sum_{k \geq 2} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k \right\| \\ &\leq \sum_{k \geq 2} \frac{1}{k} \|x\|^k \\ &\leq \sum_{k \geq 2} \frac{1}{2} \|x\|^k \\ &\leq \frac{\|x\|^2}{2(1-\|x\|)}. \end{aligned}$$

On en déduit qu'il existe une constante K telle que pour $n \geq p$

$$\left\| \frac{h_n}{2} J + \ln \left(e - \frac{h_n}{2} J \right) \right\| \leq K h_n^2.$$

Si $\sum_{k \geq 0} h_k^2 < +\infty$, alors la série de terme général $\frac{h_n}{2} J + \ln \left(e - \frac{h_n}{2} J \right)$ est absolument convergente. Si l'on note $S = \sum_{n \geq p} \frac{h_n}{2} J + \ln \left(e - \frac{h_n}{2} J \right)$ la somme de la série, on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = U_p \exp(S).$$

Sinon, on a quand même

$$\|U_n\| \leq \|U_p\| \exp \left(K \sum_{k=p}^{n-1} h_k^2 \right),$$

ce qui entraîne aisément (4.19).
■

Nous avons maintenant les outils nécessaires à l'obtention des résultats analogues à ceux du chapitre 3.

4.3.1 Comparaison des systèmes discret et continu

Nous voulons ici, sous des hypothèses convenables sur la suite des pas h_n , comparer le comportement asymptotique du système discret et celui du système continu pour une même condition initiale.

Théorème 4.4. *Soit $J \in A_a$. On suppose que $(h_n)_{n \geq 0}$ est de carré sommable et est correctement initialisée. Précisément, on suppose que l'on a*

$$(\max_{n \in \mathbb{N}} h_n) \|J\|_{A_a} < 2,$$

Pour $x \in B_{a,0}$, on note $\mu_n^{(x)}$ la loi de $X_n^{(x)}$. On rappelle que μ_t^x désigne la loi de la solution du système continu au temps t avec x comme condition initiale. Soit $s \in \ker J$. Les deux propriétés qui suivent sont équivalentes.

1.

$$\mu_t^x \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} \tau_s \mu_\infty, \quad (4.21)$$

2.

$$\mu_n^{(x)} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \tau_s \mu_\infty \quad (4.22)$$

Preuve : Remarquons tout d'abord qu'il suffit de montrer cette équivalence pour $s = 0$. En effet, pour $s \in \ker J$, on a $\mu_t^{s+x} = \tau_s \mu_t^x$ et $\mu_n^{(s+x)} = \tau_s \mu_n^{(x)}$, ce qui permet de déduire la propriété pour $s \in \ker J$ de $s = 0$ en composant par τ_s et τ_{-s} . Lors de la preuve du théorème 3.3, on avait remarqué que (4.21) du système était équivalente à la propriété

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \exp\left(-\frac{t}{2} J\right) x \rightarrow 0. \quad (4.23)$$

De même, en combinant le théorème 4.1 et le lemme 42, on voit que (4.22) est équivalente à

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=0}^{n-1} \left(e - \frac{h_n}{2} J\right) x = 0 \quad (4.24)$$

Comme

$$\prod_{k=0}^{n-1} \left(e - \frac{h_n}{2} J\right) x = U_n \exp\left(-\frac{t_n}{2}\right) x$$

et que, d'après le lemme 43, U_n est convergente, on en déduit que (4.21) entraîne (4.22).

Réciproquement, remarquons que

$$(\max_{n \in \mathbb{N}} h_n) \|J\|_{A_a} < 2$$

signifie que pour tout n , $\|\frac{h_n}{2} J\|_{A_a} < 1$, ce qui implique que $e - \frac{h_n}{2} J$ est inversible. Par suite U_p est inversible, de même que $U = U_p \exp(S)$, où S

a été défini lors de la preuve du lemme 43. Par le même raisonnement que précédemment, on en déduit que (4.24) entraîne

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \exp\left(-\frac{t_n}{2}J\right)x = 0$$

Pour $t \geq 0$, on note $n(t)$ le plus petit entier k tel que $t_k \geq t$: il est clair que $\lim_{t \rightarrow \infty} n(t) = +\infty$. Mais

$$\exp\left(-\frac{t}{2}J\right)x = \exp\left(\frac{1}{2}(t_{n(t)} - t)J\right) \exp\left(-\frac{t_{n(t)}}{2}J\right)x$$

Or

$$\lim \exp\left(-\frac{t_{n(t)}}{2}J\right)x = 0$$

et

$$\left\| \exp\left(\frac{1}{2}(t_{n(t)} - t)J\right) \right\| \leq \exp\left(\frac{1}{2}\|J\|_{A_a}(\max_{n \geq 0} h_n)\right),$$

ce qui entraîne (4.23), qui est équivalent à (4.21).
■

4.3.2 Vitesse de convergence

Nous allons énoncer un lemme analogue au lemme 35.

Lemme 44. *Pour $\tau > 0$, on pose*

$$E_{J,\tau} = \{v \in B_a \quad \forall z \in \text{spec } v \quad \hat{J} \in \cup[\tau, +\infty]\}.$$

Si $u = v + s$ avec $v \in E_{J,\tau}$ et $s \in \ker J$, on a pour tout $\varepsilon > 0$

$$\left\| \prod_{k=0}^{n-1} \left(1 - \frac{h_k}{2}J\right)u - s \right\|_{B_a} = o\left(e^{-\left(\frac{\tau}{2}-\varepsilon\right)t_n}\right).$$

Preuve : On a

$$\begin{aligned} & \prod_{k=0}^{n-1} \left(1 - \frac{h_n}{2}J\right)u \\ &= \prod_{k=0}^{n-1} \left(1 - \frac{h_n}{2}J\right)v + \prod_{k=0}^{n-1} \left(1 - \frac{h_n}{2}J\right)s \\ &= \prod_{k=0}^{n-1} \left(1 - \frac{h_n}{2}J\right)v + s \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \left\| \prod_{k=0}^{n-1} \left(1 - \frac{h_n}{2} J\right) u - s \right\|_{B_a} &= \left\| \prod_{k=0}^{n-1} \left(1 - \frac{h_n}{2} J\right) v \right\|_{B_a} \\ &= \left\| U_n \exp\left(-\frac{t_n}{2} J\right) v \right\|_{B_a} \\ &\leq \|U_n\|_{A_a} \left\| \exp\left(-\frac{t_n}{2} J\right) v \right\|_{B_a} \end{aligned}$$

D'une part, d'après le lemme 35, on a

$$\left\| \exp\left(-\frac{t_n}{2} J\right) v \right\|_{B_a} = o\left(e^{-\left(\frac{\tau}{2} - \frac{\varepsilon}{2}\right)t_n}\right).$$

Mais le lemme 43 nous enseigne que

$$\|U_n\|_{A_a} = O\left(\exp\left(K \sum_{k=0}^{n-1} h_k^2\right)\right).$$

Comme $h_n \rightarrow 0$, on a $h_n \gg h_n^2$. Mais comme la série à termes positifs de terme général h_n est divergente, on a

$$t_n = \sum_{k=0}^{n-1} h_n \gg \sum_{k=0}^{n-1} h_n^2$$

Donc pour n assez grand, on a

$$K \sum_{k=0}^{n-1} h_k^2 \leq \frac{\varepsilon}{2} t_n,$$

soit

$$\exp\left(K \sum_{k=0}^{n-1} h_k^2\right) \leq \exp\left(\frac{\varepsilon}{2} t_n\right),$$

ce qui entraîne

$$\|U_n\|_{A_a} = O\left(\exp\left(\frac{\varepsilon}{2} t_n\right)\right),$$

puis finalement

$$\left\| \prod_{k=0}^{n-1} \left(1 - \frac{h_n}{2} J\right) u - s \right\|_{B_a} = o\left(e^{-\left(\frac{\tau}{2} - \varepsilon\right)t_n}\right).$$

■

Vitesse de convergence en l'absence de transition de phase

Théorème 4.5. *On suppose que $J \in \mathcal{S}_\alpha^+$, avec $\alpha > 1$ et que $\text{Re } \hat{J}$ ne s'annule pas sur \mathbb{U}_α . On pose $b = \inf_{\mathbb{U}_\alpha} \text{Re } \hat{J}$ et $a = \inf_{\mathbb{U}} \hat{J}$. Pour la suite $h_n = \frac{\kappa}{n}$ avec $\kappa \geq \frac{4}{a}$, on note $\mu_n^{(x)}$ la loi de la variable aléatoire X_n définie par $X_0 = x \in B_\alpha$ et la récurrence (4.1). On note μ_∞ la loi gaussienne centrée de densité spectrale $\frac{1}{j}$. Alors, il existe une constante $K > 0$ telle que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante L_ε telle que*

$$\forall x \in B_{\alpha,0} \quad \forall n \geq 1 \quad d(\mu_n^{(x)}, \mu_\infty) \leq K \frac{1}{n} + L_\varepsilon \|x\|_{B_\alpha} \frac{1}{n^{\frac{(b-\varepsilon)\kappa}{2}}}$$

Preuve :

D'après le lemme 42, on a $X_n^{(x)} = e_n^{(x)} + X_n^{(0)}$, d'où

$$d(\mu_n^{(x)}, \mu_\infty) \leq d(\mu_n^{(0)}, \mu_\infty) + \|e_n^{(x)}\|_{B_\alpha}.$$

On a déjà montré dans le théorème 4.2 que $d(\mu_n^{(0)}, \mu_\infty) = O(\frac{1}{n})$. De plus, d'après le lemme 43, il existe une constante Z telle que pour tout n , on ait

$$\|e_n^{(x)}\|_{B_\alpha} \leq Z \exp\left(-\frac{t_n}{2} J\right) \|A_\alpha\| \|x\|_{B_\alpha}$$

Comme $t_n = \kappa \ln n + O(1)$, le lemme 30 permet alors de conclure.

■

Théorème 4.6. *On suppose que $J \in A_a$, avec $a_n = 1 + 2^\eta |n|^\eta$ et $\eta > 0$. On suppose également que $\text{Re } \hat{J}$ ne s'annule pas sur \mathbb{U} . On pose $b = \inf_{\mathbb{U}} \hat{J}$. Pour la suite $h_n = \frac{\kappa}{n}$ avec $\kappa \geq \frac{4}{b}$, on note $\mu_n^{(x)}$ la loi de la variable aléatoire X_n définie par $X_0 = x \in B_\eta$ et la récurrence (4.1). On note μ_∞ la loi gaussienne centrée de densité spectrale $\frac{1}{j}$. Alors, il existe une constante $K > 0$ telle que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante L_ε telle que*

$$\forall x \in B_{a,0} \quad \forall n \geq 1 \quad d(\mu_n^{(x)}, \mu_\infty) \leq K \frac{1}{n} + L_\varepsilon \|x\|_{B_\alpha} \frac{1}{n^{\frac{(b-\varepsilon)\kappa}{2}}}$$

Preuve :

D'après le lemme 42, on a $X_n^{(x)} = e_n^{(x)} + X_n^{(0)}$, d'où

$$d(\mu_n^{(x)}, \mu_\infty) \leq d(\mu_n^{(0)}, \mu_\infty) + \|e_n^{(x)}\|_{B_\alpha}.$$

On a déjà montré dans le théorème 4.2 que $d(\mu_n^{(0)}, \mu_\infty) = O(\frac{1}{n})$. Le lemme 44 permet alors de conclure, puisqu'ici $E_{J,b} = B_a$.

■

En présence de transition de phase

Théorème 4.7. *Soit J un potentiel. On suppose que $J \in A_a$, avec $a_n = 1 + 2^\eta |n|^\eta$ et $\eta > 0$. On pose, pour $(\theta_1, \dots, \theta_d)$*

$$f(\theta_1, \dots, \theta_d) = \hat{J}(e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_d})$$

On suppose que $\{z \in \mathbb{U} \mid \hat{J}(z) = 0\} = \{0\}$ et qu'il existe $A \in Gl_d(\mathbb{R})$ et $d_0 < d$ tels qu'on ait :

$$\underline{\lim}_{x \rightarrow 0} f(x) \|Ax\|^{-d_0} > 0.$$

Pour la suite $h_n = \frac{1}{n^{1-\frac{d_0}{d}}}$, on note $\mu_n^{(x)}$ la loi de la variable aléatoire X_n définie par $X_0 = x \in B_a$ et la récurrence (4.1). On note μ_∞ la loi gaussienne centrée de densité spectrale $\frac{1}{j}$. Alors, si $x \in B_{a,0}$ s'écrit $x = u + s$ avec $s \in \ker J$ et $\inf\{\hat{J}(z); z \in \text{spec } u\} > 0$, on a

$$d(\mu_n^{(x)}, \tau_s \mu_\infty) = O\left(\frac{1}{t_n^{\frac{d_0}{d}-1}}\right),$$

où l'on a

$$t_n = \sum_{k=0}^{n-1} h_k \sim \frac{d}{d_0} n^{\frac{d_0}{d}},$$

soit

$$d(\mu_n^{(x)}, \tau_s \mu_\infty) = O\left(\frac{1}{n^{1-\frac{d_0}{d}}}\right).$$

Preuve :

D'après le lemme 42, on a $X_n^{(x)} = e_n^{(x)} + X_n^{(0)}$, d'où

$$d(\mu_n^{(x)}, \mu_\infty) \leq d(\mu_n^{(0)}, \mu_\infty) + \|e_n^{(x)}\|_{B_a}.$$

On a déjà montré dans le théorème 4.3 que $d(\mu_n^{(0)}, \mu_\infty) = O\left(\frac{1}{n^{1-\frac{d_0}{d}}}\right)$. En appliquant le lemme 44, on constate qu'il existe $c > 0$ tel que

$$\|e_n^{(x)}\|_{B_a} = O(\exp(-cn^{\frac{d_0}{d}})),$$

ce qui permet alors de conclure.

■

4.4 Simulation informatique

Le but de cette section est de mettre concrètement en œuvre sur un exemple significatif l'algorithme décrit dans ce chapitre. On étudie les potentiels sur le réseau \mathbb{Z}^3 dont l'interaction est spécifiée par

$$\Phi_{\Lambda}^{J,h,\beta}(\omega) = \begin{cases} \frac{K}{2}\omega_i^2 & \text{si } \Lambda = \{i\} \\ -\frac{1}{6}\omega_i\omega_j & \text{si } \Lambda = \{i, j\}, i \neq j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.25)$$

En d'autres termes, on a $J(0) = K$, $J(k) = -\frac{1}{6}$ pour $\|k\| = 1$ et $J(k) = 0$ pour $\|k\| > 1$. Pour $K = 1$, c'est le potentiel harmonique déjà mentionné au chapitre 2. Comme $\hat{J}(1) = 0$, il y a transition de phase et les vecteurs dont toutes les coordonnées sont égales sont dans $\ker J$. À l'inverse, si $K > 1$; \hat{J} est strictement positive sur \mathbb{U} et $\ker J$ ne contient aucune suite à croissance lente.

4.4.1 Choix de l'environnement de développement

Le but de notre application étant essentiellement d'illustrer notre propos, les priorités étaient pour nous

1. que le programme tourne sur des systèmes répandus.
2. que le programme tourne sur des machines – relativement – peu puissantes.
3. que l'interface utilisateur soit simple sans que cela coûte trop d'efforts de programmation.

Nous avons donc choisi d'écrire un programme tournant sous les versions de Windows de la 3.0 à Windows 98. Le langage de programmation choisi est Delphi, produit de la société Inprise (anciennement Borland). Delphi est une extension orientée objet du langage Pascal.

4.4.2 Description du programme

- Le menu Paramètres permet de consulter ou de modifier trois paramètres.
 - Le paramètre Interaction propre permet de spécifier la valeur de K . Sa valeur par défaut est 1.
 - La condition initiale choisie est un vecteur dont toutes les coordonnées sont égales. Le menu Condition initiale permet de donner cette valeur. Par défaut, elle vaut zéro.

- Le germe aléatoire est un "entier long" codé sur 4 octets servant à initialiser le générateur de nombres aléatoires. Dans le jargon probabiliste, c'est ω ! Sa valeur par défaut est zéro. La valeur n'est pas affectée par une expérience aléatoire, de manière à faciliter la comparaison du comportement du système pour un même ω et des conditions initiales ou des valeurs de l'auto-interaction distinctes.
- La commande Calcul lance une simulation pour les paramètres spécifiés.
- Le menu Fichier permet de sauvegarder l'image obtenue par une expérience aléatoire
 - sous forme d'un fichier bitmap (*.BMP) avec la commande Enregistrer
 - dans le presse-papier grâce à l'option du même nom.
 - sur papier avec la commande Imprimer.
- Informations donne le nom du programme, éventuellement sa version (!), et le nom de son auteur.

4.4.3 Contraintes mathématiques et techniques

Il est évident qu'on ne peut stocker dans la mémoire d'un ordinateur, aussi puissant soit-il, un état quelconque d'un système infini, même si l'on accepte d'approcher les réels par un codage quelconque. Et même si l'on ne veut observer qu'une partie finie du système – qui peut prétendre vouloir embrasser l'univers du regard! – il demeure un problème de fond lié à la structure spatio-temporelle des équations de récurrence du système : en effet, la connaissance de l'état du système à l'instant t_{n+1} dans le volume

$$\Lambda = [-B_x, B_x] \times [-B_y, B_y] \times [-B_z, B_z]$$

nécessite celle du système à l'instant t_n dans le volume

$$[-(B_x + 1), B_x + 1] \times [-(B_y + 1), B_y + 1] \times [-(B_z + 1), (B_z + 1)].$$

Ainsi, si l'on veut pouvoir afficher l'état du système dans le volume Λ au temps t_n , il faut une taille mémoire de l'ordre de

$$(2B_x + 2n + 1)(2B_y + 2n + 1)(2B_z + 2n + 1).$$

Ici, on a choisi de prendre $n = 15$, $B_x = B_y = 25$, $B_z = 0$ et de coder chaque réel sur 4 octets : la taille nécessaire est déjà de

$$4 * (81 * 81 * 31) \text{ octets} = 813\,564 \text{ octets} = 795 \text{ Ko.}$$

Bien sûr, cette quantité est peu importante au regard des capacités de stockage des ordinateurs actuels, mais il faut se rendre compte que ces quantités

doivent être abondamment manipulées, ce qui est coûteux en temps machine – ce qui n'est pas le cas pour un logiciel de traitement de texte, où l'utilisateur ne modifie qu'une petite partie du texte à la fois. Nous calculerons un peu plus loin une estimation du temps de calcul.

4.4.4 Description de l'algorithme

Afin de pouvoir comparer le comportement du système pour $J = 1$ et pour $J > 1$, il convient de prendre une même suite de pas $(h_n)_{n \geq 1}$ convenant dans les deux cas. Le modèle pour lequel la convergence est la plus lente étant le modèle harmonique, il convient de choisir la suite $(h_n)_{n \geq 1}$ optimale pour lui : d'après le théorème 4.3, la meilleure suite parmi celles que nous avons étudiées est

$$h_n = \frac{1}{n^\gamma},$$

avec

$$\gamma = 1 - \frac{d_0}{d} = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

On se fixe dès le départ le nombre d'itérations n_{iter} que l'on veut effectuer et le volume

$$\Lambda = [-B_x, B_x] \times [-B_y, B_y] \times [-B_z, B_z]$$

dont on veut étudier le comportement. On initialise chaque spin du volume

$$[-(B_x + n_{\text{iter}}), B_x + n_{\text{iter}}] \times [-(B_y + n_{\text{iter}}), B_y + n_{\text{iter}}] \times [-(B_z + n_{\text{iter}}), B_z + n_{\text{iter}}]$$

À la n ième étape, on calcule l'état du système dans le volume

$$\begin{aligned} &[-(B_x + n_{\text{iter}} - n), B_x + n_{\text{iter}} - n] \times [-(B_y + n_{\text{iter}} - n), B_y + n_{\text{iter}} - n] \\ &\quad \times [-(B_z + n_{\text{iter}} - n), B_z + n_{\text{iter}} - n] \end{aligned}$$

en fonction de l'état du système dans le volume

$$\begin{aligned} &[-(B_x + 1 + n_{\text{iter}} - n), B_x + 1 + n_{\text{iter}} - n] \times [-(B_y + 1 + n_{\text{iter}} - n), B_y + 1 + n_{\text{iter}} - n] \\ &\quad \times [-(B_z + 1 + n_{\text{iter}} - n), B_z + 1 + n_{\text{iter}} - n] \end{aligned}$$

au temps $n - 1$ et de la formule de récurrence (4.2) qui s'écrit ici

$$X_{n+1}^k = X_n^k - \frac{h_n}{2} (KX_n^k - \frac{1}{6} \sum_{i, \|k-i\|=1} X_n^i) + \sqrt{h_n} \eta_n^k \quad (4.26)$$

Les variables aléatoires η_n^k qui sont, rappelons-le, des variables aléatoires gaussiennes centrées indépendantes sont simulées grâce à l'*algorithme polaire*, une variante de l'algorithme de rejet dont on trouvera par exemple une

description dans le livre de Petritis [35]. Cet algorithme simple à mettre en œuvre possède l'avantage de simuler deux variables aléatoires gaussiennes indépendantes chaque fois qu'il est exécuté. À chaque appel de l'algorithme, on mettra donc en mémoire la deuxième valeur calculée afin d'éviter des itérations inutiles.

4.4.5 Évaluation du temps de calcul

Les opérations élémentaires à effectuer étant les mêmes pour chacun de X_n^k que l'on doit calculer, le temps de calcul est donc proportionnel au nombre de X_n^k à calculer. Le petit raisonnement fait à la section précédente nous indique pour quels points de l'espace-temps il convient de calculer X_n^k ¹ : c'est

$$\{(k, n) \in \mathbb{Z}^d \times \mathbb{N}, \quad d(k, \Lambda) \leq n_{\text{iter}} - n\}.$$

Ainsi, pour calculer l'état d'un parallélépipède rectangle Λ de côtés $l_1 \times l_2 \times l_3$ après n_{iter} itérations, il faut un temps machine proportionnel à

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{n_{\text{iter}}} (l_1 + 2k)(l_2 + 2k)(l_3 + 2k) \\ = & \sum_{k=0}^{n_{\text{iter}}} l_1 l_2 l_3 + 2(l_1 l_2 + l_2 l_3 + l_3 l_1)k + 4(l_1 + l_2 + l_3)k^2 + 8k^3 \\ = & l_1 l_2 l_3 (n_{\text{iter}} + 1) + 2(l_1 l_2 + l_2 l_3 + l_3 l_1) \frac{n_{\text{iter}}(n_{\text{iter}} + 1)}{2} \\ & + 4(l_1 + l_2 + l_3) \frac{n_{\text{iter}}(n_{\text{iter}} + 1)(2n_{\text{iter}} + 1)}{6} + 8 \left(\frac{n_{\text{iter}}(n_{\text{iter}} + 1)}{2} \right)^2 \\ = & \text{Volume}(\Lambda)(n_{\text{iter}} + 1) \\ & + \text{Surface}(\Lambda) \frac{n_{\text{iter}}(n_{\text{iter}} + 1)}{2} \\ & + \text{Longueur des Arêtes}(\Lambda) \frac{n_{\text{iter}}(n_{\text{iter}} + 1)(2n_{\text{iter}} + 1)}{6} \\ & + \text{Nombre de Sommets}(\Lambda) \left(\frac{n_{\text{iter}}(n_{\text{iter}} + 1)}{2} \right)^2 \end{aligned}$$

Cette formule permet donc d'estimer le temps de calcul nécessaire, à un facteur près dépendant de la machine. Ainsi, pour notre programme, nous avons choisi $l_1 = l_2 = 51$ et $n_{\text{iter}} = 15$. À titre indicatif, signalons que ce calcul a pris 32 secondes sur un Pentium MMX 233.

¹Dans le cas qui nous intéresse, ce n'est pas complètement optimal, car les sommets en diagonale n'interagissent pas, mais cela n'augmente pas de beaucoup le calcul.

4.4.6 Résultats obtenus

Le graphique ci-dessous représente les images obtenues pour le modèle harmonique ($K = 1$) avec pour conditions initiales les suites identiquement égales à -1 pour le diagramme de gauche, 0 pour celui du milieu et 1 pour celui de droite.

Il est immédiat à l'oeil que ces trois images sont bien différentes. Afin d'avoir des données chiffrées, nous avons demandé à l'ordinateur de nous fournir la proportion de pixels dont l'intensité dépasse la valeur de saturation 1. Nous avons obtenu respectivement 0.0261, 0.1717 et 0.5083.

Observons si l'on obtient des résultats analogues pour un autre aléa : dans l'exemple précédent, le germe aléatoire était 0. Pour le germe aléatoire 73, on obtient les images suivantes :

Les proportions de saturation sont respectivement 0.0317, 0.1819 et 0.5148.

Le graphique ci-dessous représente les images obtenues pour un modèle

harmonique perturbé ($K = 5$) avec les conditions initiales $-1, 0$ et 1 .

Ici en revanche, les trois images semblent très proches : on obtient les proportions de 0.0261 , 0.0263 et 0.0263 .

Suivent les images obtenues pour l'aléa 73 :

On obtient pour chacune des 3 images la proportion de saturation de 0.0298 .

Les images et les chiffres sont éloquents. Sur ces exemples, on a pu observer conformément à la théorie que la transition de phase se traduit par une forte dépendance à la condition initiale tandis que l'absence de transition de phase est concomitante à l'ergodicité du système.

Annexe A

Code Source de l'application

A.1 fichier principal Quadyn.dpr

```
program Quadyn;

uses
  Forms,
  Dyna in 'DYNA.PAS' {Form1},
  Ahoui in 'AHOUI.PAS' {AboutBox};

{$R *.RES}

begin
  Application.CreateForm(TForm1, Form1);
  Application.CreateForm(TAboutBox, AboutBox);
  Application.Run;
end.
```

A.2 Unité Ahoui.pas

```
unit Ahoui;

interface

uses WinTypes, WinProcs, Classes, Graphics, Forms, Controls, StdCtrls,
  Buttons, ExtCtrls;

type
```

```
TAboutBox = class(TForm)
  Panel1: TPanel;
  OKButton: TBitBtn;
  ProgramIcon: TImage;
  ProductName: TLabel;
  Version: TLabel;
  Copyright: TLabel;
  Comments: TLabel;
private
  { Private declarations }
public
  { Public declarations }
end;

var
  AboutBox: TAboutBox;

implementation

{$R *.DFM}

end.
```

A.3 Fiche Ahoui.txt

```
object AboutBox: TAboutBox
  Left = 200
  Top = 99
  ActiveControl = OKButton
  BorderStyle = bsDialog
  Caption = 'A propos'
  ClientHeight = 243
  ClientWidth = 298
  Font.Color = clWindowText
  Font.Height = -13
  Font.Name = 'System'
  Font.Style = []
  PixelsPerInch = 96
  Position = poScreenCenter
```

```

TextHeight = 16
object Panel1: TPanel
  Left = 8
  Top = 8
  Width = 281
  Height = 161
  BevelInner = bvRaised
  BevelOuter = bvLowered
  TabOrder = 0
object ProgramIcon: TImage
  Left = 8
  Top = 8
  Width = 65
  Height = 57
  Picture.Data = {
    07544269746D617076020000424D760200000000000076000000280000002000
    00002000000001000400000000000020000000000000000000100000000000
    000000000000000800000800000008080008000000080008000800000C0C0
    C000808080000000FF0000FF000000FFFF00FF000000FF00FF00FFFF0000FFFF
    FF000000000000000000000000000000000000000000000000EE8787878EEEEEE03F30878EEE
    EEE00EE8787878EEEEEE03F30878EEEEEE00EE8787878EEEEEE03F30878EEE
    EEE00EE8787878EEEEEE03F30878EEEEEE00887787877788888803F3088787E
    EEE00788787878878887803F3088887EEEE00788887888878887803F3088887E
    EEE00877888887788888703F308887EEEE0088877777888888037883088888
    8EE007777777777777703787883087777EE00888888888888803787FF8830888
    88800888888888888037877777883088888007777777788037873F3F87808
    88E00888888888803787FFFFFFFF8830EEE0088777777880000111111111100
    EEE008888888888899B999B99999EEEE0088888888888899B99B999999EE
    EEE008888888888899BB99BB99BB99EEEE007888888888899B999B999999EE
    EEE0087788888778899B99BB99BB99EEEE00888778778888E9B99B999999EE
    EEE0088888788888EE9B99B9BB9BEEEE00EE8888888EEEE999B999999EEEE
    EEE00EEEE888EEEEEE99BB999EEEEEE00EEEE8EEEEEEEE999B9EEEEEE
    EEE00EEEE8EEEEEEEEEE999EEEEEE00EEEE8EEEEEEEEEE99EEEEEE
    EEE00EEEE8EEEEEEEEEE9EEEEEEEE00EEEE8EEEEEEEEEEEEEEEEEE
    EEE00EEEEEEEEEEEEEEEEEEEEEEEEEEEE000000000000000000000000000000
    0000}
  Stretch = True
  IsControl = True
end
object ProductName: TLabel
  Left = 87

```

```
    Top = 16
    Width = 145
    Height = 13
    Caption = 'Interactions quadratiques'
    Font.Color = clBlack
    Font.Height = -11
    Font.Name = 'MS Sans Serif'
    Font.Style = [fsBold]
    ParentFont = False
    IsControl = True
end
object Version: TLabel
    Left = 88
    Top = 40
    Width = 65
    Height = 13
    Caption = 'Version 1.0'
    Font.Color = clBlack
    Font.Height = -11
    Font.Name = 'MS Sans Serif'
    Font.Style = [fsBold]
    ParentFont = False
    IsControl = True
end
object Copyright: TLabel
    Left = 8
    Top = 80
    Width = 117
    Height = 13
    Caption = 'Auteur: Olivier Garet'
    Font.Color = clBlack
    Font.Height = -11
    Font.Name = 'MS Sans Serif'
    Font.Style = [fsBold]
    ParentFont = False
    IsControl = True
end
object Comments: TLabel
    Left = 8
    Top = 104
    Width = 110
```

```
        Height = 39
        Caption = 'Programme d'#39'accompagnement de thèse.'
        Font.Color = clBlack
        Font.Height = -11
        Font.Name = 'MS Sans Serif'
        Font.Style = [fsBold]
        ParentFont = False
        WordWrap = True
        IsControl = True
    end
end
object OKButton: TBitBtn
    Left = 111
    Top = 178
    Width = 77
    Height = 27
    Font.Color = clBlack
    Font.Height = -11
    Font.Name = 'MS Sans Serif'
    Font.Style = [fsBold]
    ParentFont = False
    TabOrder = 1
    Kind = bkOK
    Margin = 2
    Spacing = -1
    IsControl = True
end
end
```

A.4 Unité Dyna.pas

```
unit Dyna;

interface

uses
    SysUtils, WinTypes, WinProcs, Messages, Classes, Graphics, Controls,
    Forms, Dialogs, Menus, ExtCtrls, ClipBrd, Printers, ahoui;

type
```

```
TForm1 = class(TForm)
  MainMenu1: TMainMenu;
  Fichier: TMenuItem;
  Paramtres1: TMenuItem;
  AutoInteraction1: TMenuItem;
  GermeAlatoire1: TMenuItem;
  Affichage1: TMenuItem;
  Saturation1: TMenuItem;
  Palette1: TMenuItem;
  Calcul1: TMenuItem;
  Enregistrer1: TMenuItem;
  Imprimer1: TMenuItem;
  Conditioninitiale1: TMenuItem;
  Image1: TImage;
  SaveDialog1: TSaveDialog;
  infos: TMenuItem;
  Pressepapier1: TMenuItem;
  procedure AutoInteraction1Click(Sender: TObject);
  procedure GermeAlatoire1Click(Sender: TObject);
  procedure Conditioninitiale1Click(Sender: TObject);
  procedure Calcul1Click(Sender: TObject);
  procedure Saturation1Click(Sender: TObject);
  procedure Enregistrer1Click(Sender: TObject);
  procedure infosClick(Sender: TObject);
  procedure Palette1Click(Sender: TObject);
  procedure Pressepapier1Click(Sender: TObject);
  procedure Imprimer1Click(Sender: TObject);
private
  { Private-déclarations }
public
  { Public-déclarations }
end;

var
  Form1: TForm1;

implementation

{$R *.DFM}
```



```
const cote_x=80;
      cote_y=80;
      cote_z=31;
      nb_iter=15;
      pp=-1;

var deja:boolean;
    reserve,sature,auto,cond_init:real;
    bitmap:tbitmap;
    fichier:tfilename;
    ncalc:byte;

function gauss:real;
var u,v1,v2,s:real;
begin
  if deja then begin deja:=false; gauss:=reserve; end;
  repeat
    v1:=2*random-1;
    v2:=2*random-1;
    s:=sqr(v1)+sqr(v2);
  until s<1;
  u:=sqrt(-2*ln(s)/s);
  reserve:=v1*u;
  deja:=true;
  gauss:=v2*u;
end;

procedure eval(s:string;var resultat:real;
var posi:integer);
var expo,re,mantisse,pu:real;
    i,j,k,nexp,fin:integer;
    moins_un:boolean;
    sexp:string;
begin
  while s[1]=' ' do s:=copy(s,2,length(s)-1);
  if s[1]='-' then
    begin
      s:=copy(s,2,length(s)-1);
      moins_un:=true;
    end else moins_un:=false;
```

```

i:=pos('e',s);
j:=pos('E',s);
if (i=0) or (j=0) then
begin
  i:=i+j;
  if i=0
  then
  begin
    expo:=1;
    fin:=length(s);
  end
  else
  begin
    sexp:=copy(s,i+1,length(s)-i);
    val(sexp,nexp,posit);
    expo:=exp(nexp*ln(10));
    fin:=i-1;
  end;
  j:=pos('.',s);
  if j=0 then
  val(copy(s,1,fin),mantis,posit)
  else
  val(copy(s,1,j-1),mantis,posit);
  re:=mantis;
  if j>0 then
  begin
    pu:=1;
    for k:=j+1 to fin do
    begin
      pu:=pu/10;
      re:=re+(ord(s[k])-48)*pu;
    end;
  end;
  re:=re*expo;
  if moins_un then resultat:=-re
  else resultat:=re;
end else posit:=i;
end;

function transf(r:real):byte;

```

```
begin
  if r>sature then r:=sature else if r<-100
    then r:=-sature;
  if r>0
then transf:=round(127+ln(1+r)/ln(1+sature)*127)
else transf:=round(127-ln(1-r)/ln(1+sature)*127)
end;

procedure TForm1.AutoInteraction1Click(Sender: TObject);
  var s:string;
      code:integer;

begin
  str(auto:8:4,s);
  s:=inputbox('Saisie de l''auto-interaction',
  'Entrez la valeur de l''auto-interaction',
  s);
  eval(s,auto,code);
end;

procedure TForm1.GermeAlatoire1Click(Sender: TObject);
  var s:string;
      code:integer;

begin
  str(randseed:16,s);
  s:=inputbox('Saisie du germe aléatoire',
  'Entrez la valeur du germe',s);
  val(s,randseed,code);
end;

procedure TForm1.Conditioninitiale1Click(Sender: TObject);
  var s:string;
      code:integer;

begin
  str(cond_init:8:4,s);
  s:=inputbox('Saisie de la condition initiale',
  'Entrez la valeur de la condition initiale',s);
  eval(s,cond_init,code);
end;
```

```

procedure TForm1.Saturation1Click(Sender: TObject);
  var s:string;
      code:integer;
begin
  str(sature:8:4,s);
  s:=inputbox('Saisie de la valeur de saturation',
  'Entrez la valeur de saturation',s);
  eval(s,sature,code);

end;
{procedure transformation;}
procedure TForm1.Calcul1Click(Sender: TObject);

type minitab=array[0..cote_x,0..cote_y] of single;
   pminitab=~minitab;

var t1,t2,t3:pminitab;
    tab:array[0..cote_z] of pminitab;
    i,j,k,n:byte;
    chaine:string;
    sran:longint;

function moyenne:real;
  var ii,jj,kk:byte;
      s,w:real;
  begin
    w:=1/((cote_x-2*n+1)*(cote_y-2*n+1)*(cote_z-2*n+1));
    s:=0;
    for ii:=n to cote_z-n do
      begin
        {t1^:=tab[ii]^;}
        for jj:=n to cote_x-n do
          for kk:=n to cote_y-n do
            {s:=s+(tab[ii]^[jj,kk])*w; }
            if tab[ii]^[jj,kk]>sature then s:=s+w;
          end;
        moyenne:=s;
      end;
end;

```

```

procedure change;
var st:pminitab;
    i,j,k:shortint;
    hn:real;

begin

    hn:=exp(-ln(n+100)/3);
    t1^:=tab[n]^;
    t2^:=tab[n+1]^;
    for i:=n+1 to cote_z-(n+1) do
    begin
        t3^:=tab[i+1]^;
        {changer t1}
        for j:=n+1 to cote_x-(n+1) do
        for k:=n+1 to cote_y-(n+1) do
        begin
            t1^[j,k] := (1-0.5*auto*hn)*t2^[j,k] +
                0.5*hn*
            (t1^[j,k]+t3^[j,k]+t2^[j+1,k]+t2^[j-1,k]
            +t2^[j,k-1]+t2^[j,k+1])/6+gauss*sqrt(hn);
            {if (i in [23..27]) and (j in [20..60]) and (k in [20..60]) then
            bitmap.canvas.pixels[cote*(i-23)+j,
            k] :=
            transf(t1^[j,k]);}
            end;
        tab[i]^:=t1^;
        st:=t1;
        t1:=t2;
        t2:=t3;
        t3:=st;
        end;
        inc(n);
    end;

begin
    cursor:=crHourglass;
    new(t1);
    new(t2);
    new(t3);

```

```

for i:=0 to cote_z do
  begin
    new(tab[i]);
    for j:=0 to cote_x do for k:=0 to cote_y do
      tab[i]^[j,k]:=cond_init;
    end;
    n:=0;
    sran:=randseed;
    for k:=1 to nb_iter do
      change;
    randseed:=sran;
    for j:=0 to cote_x-2*n do for k:=0 to cote_y-2*n
      do
        bitmap.canvas.pixels[j+n+ncalc*cote_x-(ncalc+1)*nb_iter,k+n]:=
          transf(tab[cote_z div 2]^[j+n,k+n]);
        image1.picture.graphic:=bitmap;
        ncalc:=(ncalc+1) mod 3;
        str(moyenne:8:4,chaine);
        showmessage(chaine);
        cursor:=0;
        for i:=0 to cote_z do dispose(tab[i]);
        dispose(t1);
        dispose(t2);
        dispose(t3);
      end;

procedure TForm1.Enregistrer1Click(Sender: TObject);
begin
  if savedialog1.execute then
    begin
      bitmap.savetofile(savedialog1.filename);
    end;
end;

procedure TForm1.infosClick(Sender: TObject);
begin
  aboutbox.showmodal;
end;

procedure TForm1.Palette1Click(Sender: TObject);
var cou:array[ 0..255] of tpaletteentry ;

```

```
        i:byte;
begin
{ for i:=0 to 255 do
  begin
    cou[i].pered:=0;
    cou[i].pegreen:=i;
    cou[i].peblue:=i;
    cou[i].peflags:=pc_reserved;
  end;
  animatepalette(bitmap.palette,20,200,cou);}
end;

procedure TForm1.Pressepapier1Click(Sender: TObject);
begin
  clipboard.Assign(bitmap);
end;

procedure TForm1.Imprimer1Click(Sender: TObject);
begin
  printer.begindoc;
  printer.canvas.draw(0,0,bitmap);
  printer.enddoc;
end;

begin
  bitmap:=tbitmap.create;
  bitmap.width:=(cote_x-nb_iter)*3;
  bitmap.height:=cote_y;
  deja:=false;
  sature:=1;
  auto:=1;
  cond_init:=0;
end.
```

A.5 Fiche Dyna.txt

```
object Form1: TForm1
  Left = 200
```

```
Top = 99
Width = 435
Height = 300
Caption = 'Simulation d'#39'une interaction quadratique'
Font.Color = clWindowText
Font.Height = -13
Font.Name = 'System'
Font.Style = []
Menu = MainMenu1
PixelsPerInch = 96
TextHeight = 16
object Image1: TImage
  Left = 0
  Top = 96
  Width = 456
  Height = 80
end
object MainMenu1: TMainMenu
  Left = 23
  Top = 65530
  object Fichier: TMenuItem
    Caption = 'Fichier'
    object Enregistrer1: TMenuItem
      Caption = 'Enregistrer'
      OnClick = Enregistrer1Click
    end
    object Imprimer1: TMenuItem
      Caption = 'Imprimer'
      OnClick = Imprimer1Click
    end
    object Pressepapier1: TMenuItem
      Caption = 'Presse-papier'
      OnClick = Pressepapier1Click
    end
  end
  object Paramtres1: TMenuItem
    Caption = 'Paramètres'
    ShortCutText = 'Ctrl+P'
    object AutoInteraction1: TMenuItem
      Caption = 'Auto-Interaction'
      OnClick = AutoInteraction1Click
    end
  end
end
```



```
    end
    object GermeAlatoire1: TMenuItem
      Caption = 'Germe Aléatoire'
      OnClick = GermeAlatoire1Click
    end
    object Conditioninitiale1: TMenuItem
      Caption = 'Condition initiale'
      OnClick = Conditioninitiale1Click
    end
  end
end
object Affichage1: TMenuItem
  Caption = 'Affichage'
  object Saturation1: TMenuItem
    Caption = 'Saturation'
    OnClick = Saturation1Click
  end
  object Palette1: TMenuItem
    Caption = 'Palette'
    OnClick = Palette1Click
  end
end
object Calcul1: TMenuItem
  Caption = 'Calcul'
  OnClick = Calcul1Click
end
object infos: TMenuItem
  Caption = 'Informations'
  OnClick = infosClick
end
end
object SaveDialog1: TSaveDialog
  Left = 199
  Top = 113
end
end
```


Bibliographie

- [1] DOBRUSHIN (R.L.). Gaussian random fields - gibbsian point of view. In R.L. Dobrushin et Ya.G. Sinai, editor, *Multicomponent random systems*, volume 6 of *Advances in Probability and Related Topics*. Dekker, 1980.
- [2] ARAUJO (A.) and GINÉ (E.). *The Central Limit Theorem for Real and Banach Valued Random Variables*. Wiley, 1980.
- [3] ARNAUDIÈS (J.M.) et FRAYSSE (H.). *Cours de mathématiques - 1 Algèbre*. Dunod, 1987.
- [4] PRESUTTI (E.) et PULVIRENTI (M.) BENFATTO (G.). DLR measures for one-dimensional harmonic systems. *Z. Wahrsch. Verw. Geb.*, 41 :305–312, 1978.
- [5] BILLINGSLEY (P.). *Probability and Measure*. Wiley, 1986.
- [6] BOGACHEV (V.). Gaussian measures on linear spaces. *J. of Math. Sci.*, 79 :933–1034, 1996.
- [7] CARTAN (H.). *Cours de calcul différentiel*. Hermann, 1977.
- [8] CHABAT (B.). *Introduction à l'analyse complexe*. Mir, 1990.
- [9] FERMIGIER (S.) CHAMBERT-LOIR (S.) and MAILLOT (V.). *Exercices de Mathématiques pour l'Agrégation - Analyse 1*. Masson, 1995.
- [10] CHAY (S. C.). On quasi-markov random fields. *J. of Multivariate Analysis*, 2 :14–76, 1972.
- [11] DA PRATO (G.) et ZABCZYK (J.). *Stochastic Equations in Infinite Dimensions*. Cambridge, 1992.
- [12] DA PRATO (G.) et ZABCZYK (J.). Convergence to equilibrium for classical and quantum spin systems. *Probab. Theory. Relat. Fields*, 103 :529–552, 1995.
- [13] DEUSCHEL (J.D.). Invariance principle and empirical mean large deviations of the critical Orstein-Uhlenbeck process. *The Annals of Probability*, 17 :74–90, 1989.
- [14] DIEUDONNÉ (J.). *Calcul infinitésimal*. Hermann, 1980.

- [15] DOSS (H.) et ROYER (G.). Processus de diffusion associé aux mesures de Gibbs sur $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$. *Z. Warsch. verw. Gebiete*, 46 :107–124, 1978.
- [16] DUFLO (M.). *Algorithmes stochastiques*. Mathématiques et Applications. Springer, 1996.
- [17] ERDELYI (A.). *Asymptotic Expansions*. Dover, 1956.
- [18] GEORGII (H.-O.). *Gibbs Measures and Phase Transitions*. Walter de Gruyter, 1988.
- [19] GUYON (X.). *Champs aléatoires sur un réseau*. Masson, 1992.
- [20] HALMOS (P.). *A Hilbert Space Problem Book*. Springer-Verlag, 1982.
- [21] HARTHONG (J.). *Etudes sur la mécanique quantique*. Société Mathématique de France, 1984.
- [22] HOCHSTADT (H.). *Les Fonctions de la Physique Mathématique*. Masson, 1973.
- [23] KAHANE (J.P.). *Séries de Fourier absolument convergentes*. Springer, 1970.
- [24] KAHANE (J.P) et LEMARIÉ-RIEUSSET (P. G.). *Séries de Fourier et ondelettes*. Cassini, 1998.
- [25] KAHANE (J.P) et SALEM (R.). *Ensembles parfaits et séries trigonométriques*. Hermann, 1994.
- [26] KELLER (G.). *Equilibrium States in Ergodic Theory*. Cambridge University Press, 1998.
- [27] KÜNSCH (H.-R.). Gaussian Markov random fields. *J. Fac. of Science of Univ. of Tokyo*, 26 :53–73, 1979.
- [28] KÜNSCH (H.-R.). *Reellwertige Zufallsfelder auf einem Gitter : Interpolationsprobleme, Variationsprinzip und statistische Analyse*. PhD thesis, Zürich, 1980.
- [29] KONDRATIEV (Yu. G.) et SOKOL (T. A.). Gaussian measures and stochastic quantification. *Selecta Mathematica formerly Sovietica*, 13(3) :225–238, 1994.
- [30] LAROCHE (E.). Hypercontractivité pour des systèmes de spins de portée infinie. *Probab. Theory. Relat. Fields*, 101 :89–132, 1995.
- [31] LIFSHITS (M.). *Gaussian Random Functions*. Kluwer Academic Publishers, 1995.
- [32] LIGGETT (T.M.). *Interacting Particle Systems*. Springer-Verlag, 1985.
- [33] OLVER (F.W.J.). *Asymptotics and Special Functions*. Academic Press, 1974.

- [34] PEDERSEN (G.K.). *Analysis Now*. Springer-Verlag, 1995.
- [35] PETRITIS (D.). *Simulations numériques Monte Carlo*. preprint Université de Rennes I, 1993.
- [36] PICKANDS III (J.). Maxima of stationary Gaussian processes. *Z. Wahrsch. verw. Geb.*, 7 :190–223, 1967.
- [37] REVUZ(D.) et YOR (M.). *Continuous Martingales and Brownian Motion*. A series of Comprehensive Studies in Mathematics. Springer-Verlag, 1994.
- [38] ROELLY (S.) et SEU (D.). Limite ergodique de processus de diffusion infini-dimensionnels. *Publicaciones matematicas*, à paraître.
- [39] ROSANOV (Yu. A.). On Gaussian fields with given conditional distributions. *Th. of Prob. Appl.*, 12 :433–443, 1967.
- [40] ROYER (G.). Processus de diffusion associé à certains modèles d'Ising à spins continus. *Z. Warsch. verw. Gebiete*, 46 :165–176, 1979.
- [41] RUDIN (W.). *Fourier Analysis on groups*. Wiley, 1960.
- [42] RUDIN (W.). *Function Theory in the Unit Ball of \mathbb{C}^n* . Springer, 1980.
- [43] RUDIN (W.). *Functional Analysis*. McGraw-Hill, 1991.
- [44] SHIGA (T.) et SHIMIZU (A.). Infinite dimensional stochastic differential equations and their applications. *J. Math. Kyoto. Univ.*, 20-3 :395–416, 1980.
- [45] SPITZER (F.). *Principles of Random Walk*. Van Nostrand, 1964.
- [46] SPITZER (F.). Introduction aux processus de Markov à paramètre dans \mathbb{Z}_ν . In *École d'Été de Probabilités de Saint-Flour III*, Lecture Notes in Mathematics n° 390. Springer-Verlag, 1974.
- [47] STEIN (E.M.). *Harmonic Analysis*. Princeton math. series, 1993.
- [48] TRÉNOGUINE (V.). *Analyse fonctionnelle*. Mir, 1985.
- [49] WATSON (G.N.). *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*. Cambridge Univ. Press, 1958.
- [50] ZYGMUND (A.). *Trigonometric series*. Cambridge Univ. Press, 1959.

Index

- \mathcal{S}_α , 32
- \mathcal{S}_α^+ , 32
- algèbre de Banach, 18, 139
- caractère, 18
- champ aléatoire, 10
- convolution, 16
- couronne \mathbb{U}_r , 16
- croissance lente, 21
- décroissance rapide, 21
- densité spectrale, 14
- ensemble $\mathfrak{G}_{J,h}^\beta$, 12
- espace A_a , 16
- espace A_α , 22
- espace B_a , 16
- espace B_α , 22
- fonction Υ_J , 111
- fonction de partition, 11
- groupe Γ , 32
- hamiltonien, 11
- interaction quadratique, 12
- mesure de Gibbs, 10
- portée d'une interaction, 11
- potentiel, 11, 13
- potentiel harmonique, 72, 145
- potentiel quadratique, 12
- Schauder (base faible de), 80
- suite δ_n , 17
- support spectral, 106
- tore \mathbb{U} , 13
- transformée de Fourier \hat{J} , 13
- transition de phase, 12
- type \mathcal{E} , 15

Auteur : Olivier GARET

Titre : Mesures de Gibbs gaussiennes et dynamiques aléatoires associées sur $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$.

Résumé : Le but de ce travail est l'étude des champs aléatoires sur le réseau \mathbb{Z}^d associés à des interactions quadratiques.

Dans un premier temps, prolongeant les résultats de Dobrushin et Künsch, nous énonçons des critères simples pour l'existence et l'unicité de mesures de Gibbs associées à une interaction quadratique donnée et vérifiant certaines conditions de support. Nous étudions quelques propriétés topologiques de l'ensemble des paramètres du système pour lesquels il y a existence et unicité. Pour $d = 1$, on étudie en détail l'ensemble des mesures de Gibbs lorsqu'il y a transition de phase – *i.e.* non-unicité d'une mesure de Gibbs.

Puis, on revient à un réseau de dimension quelconque. Après avoir étudié l'influence de la transition de phase sur la décroissance spatiale de la corrélation du champ de Gibbs gaussien et les théorèmes de limite centrale, nous introduisons un système différentiel stochastique gradient associé à l'interaction. On établit que chaque phase pure – *i.e.* chaque mesure de Gibbs extrémale – peut être obtenue comme limite temporelle de la solution de l'e.d.s. pour un ensemble de conditions déterministes dont on donne une description. Ainsi l'absence de transition de phase correspond à l'ergodicité du système. Nous étudions également l'influence de la transition de phase sur la vitesse de convergence.

Enfin, nous présentons un algorithme stochastique discrétisant le système différentiel permettant d'obtenir les phases pures comme limites d'une chaîne de Markov inhomogène à temps discret. Pour un exemple précis, nous mettons en oeuvre cet algorithme sur ordinateur et obtenons une illustration de certains des théorèmes démontrés auparavant.

Mots-clés : champs gibbsiens, champs gaussiens, transition de phase, diffusion infini-dimensionnelle, ergodicité, simulation, algorithme stochastique.

Classification AMS : 42B05, 60H10, 60K35, 82B26, 82C31, 93E30