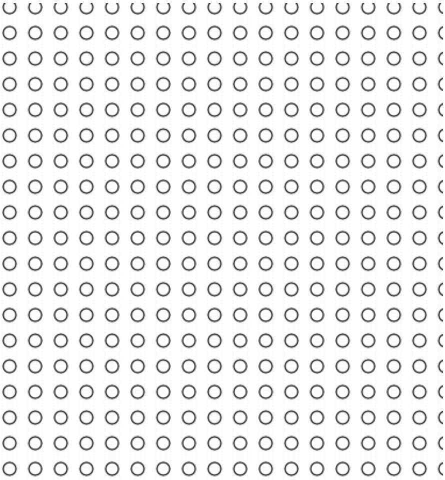
Percolation

Olivier Garet

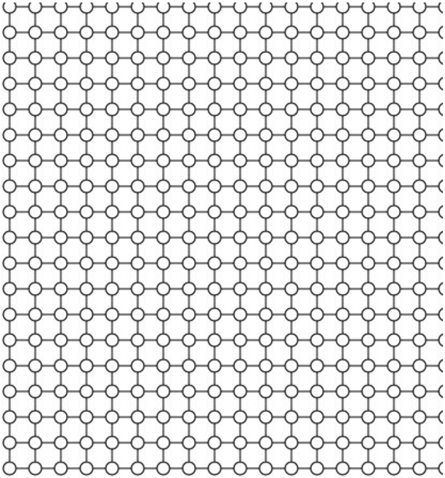
Université de Nancy – IECN

Congrès de Lorraine Math en Jean, le 21 avril 2009

Le réseau (sans les arêtes)



Le réseau (avec les arêtes)



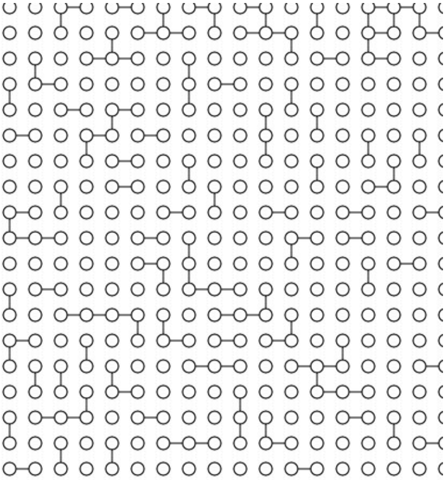
Le réseau aléatoire

On choisit un paramètre p qui représente la proportion d'arêtes ouvertes (=présentes=dessinées). On espère avoir dans une grande boîte

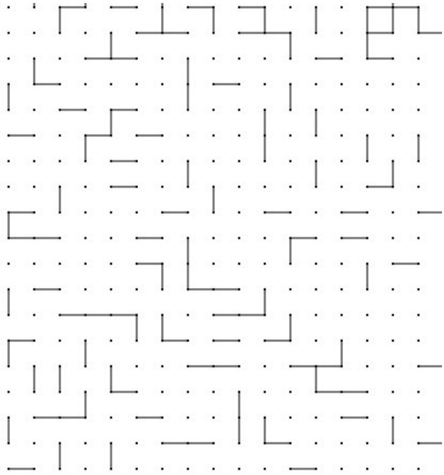
$$\frac{\text{Nombre d'arêtes ouvertes}}{\text{Nombre total d'arêtes}} \sim p.$$

- Pour chaque arête, on tire un nombre U au hasard (touche $\boxed{\text{rand}}$ de la calculatrice).
- Si $U < p$, alors on dessine l'arête, sinon on ne la dessine pas.

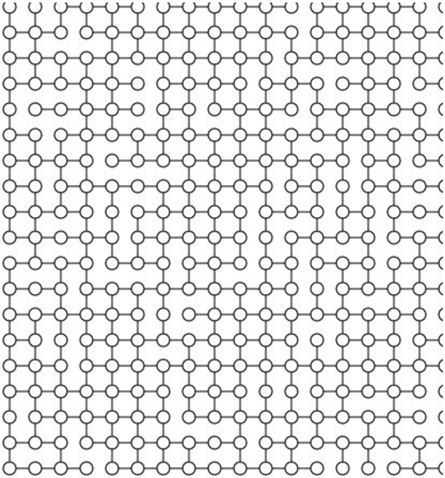
Le réseau, avec peu d'arêtes ($p = 0.2$)



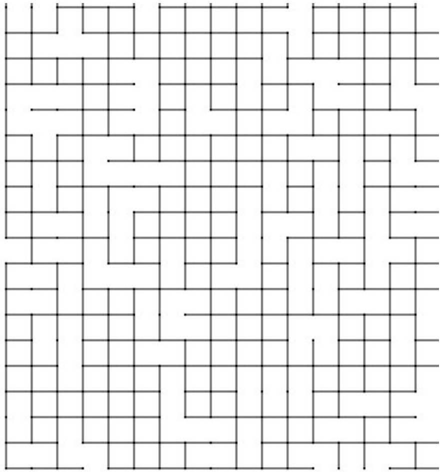
Le même, sans les cercles

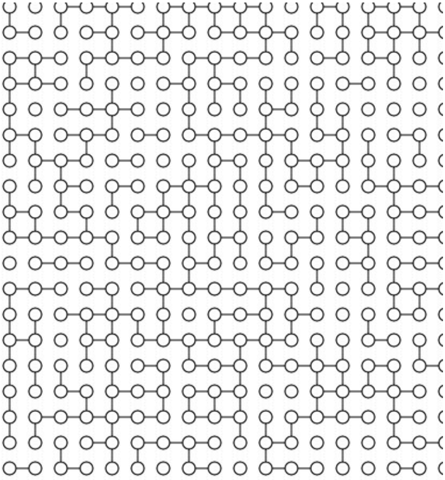


Le réseau, avec beaucoup d’arêtes ($p = 0.8$)

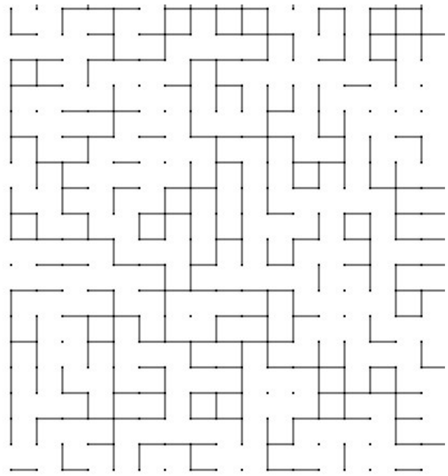


Le même, sans les cercles





Le même, sans les cercles



Pour mieux comprendre, on va observer la taille des blocs de points reliés entre eux. Un bloc (ou amas) est aussi appelé composante connexe du graphe. Les amas forment une partition du graphe, ce qui signifie que

- Tout point est dans un amas.
- Aucun point n'est dans deux amas.

Remarquons qu'il peut y avoir des amas composés d'un seul point.

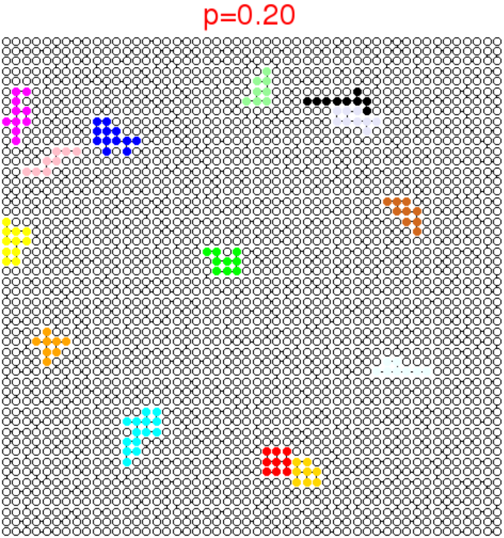
Les composantes connexes

Dans les images qui suivent, on va colorier les plus gros amas avec les couleurs suivantes, par effectif décroissant:

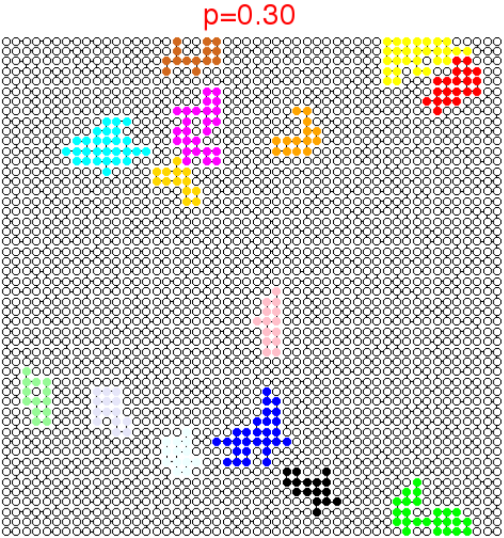
- Bleu clair
- Bleu foncé
- Jaune
- Rouge magenta
- Vert
- Rouge
- Noir
- Lavande

Et aussi marron, rose, orange, vert pâle, or, azur.

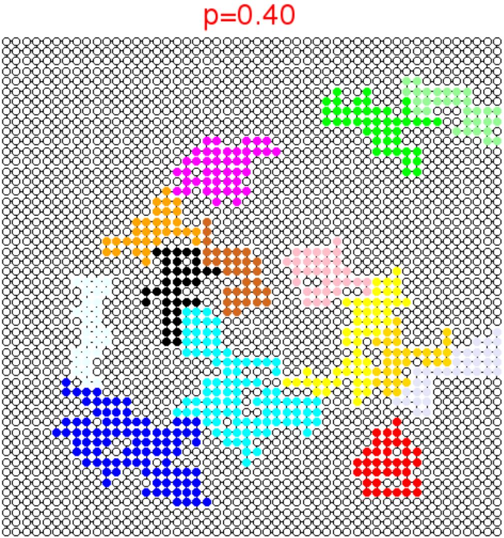
$p = 0.2$



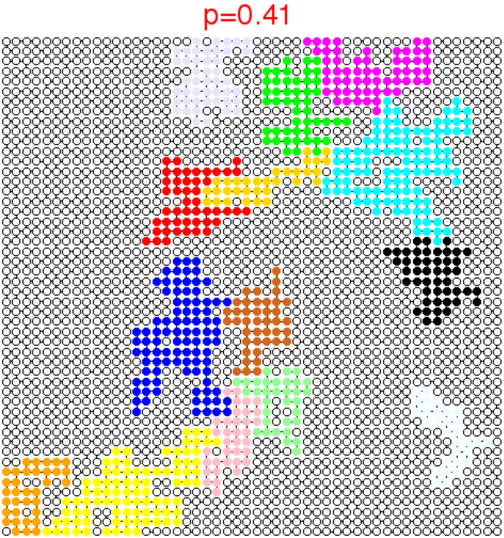
$p = 0.3$



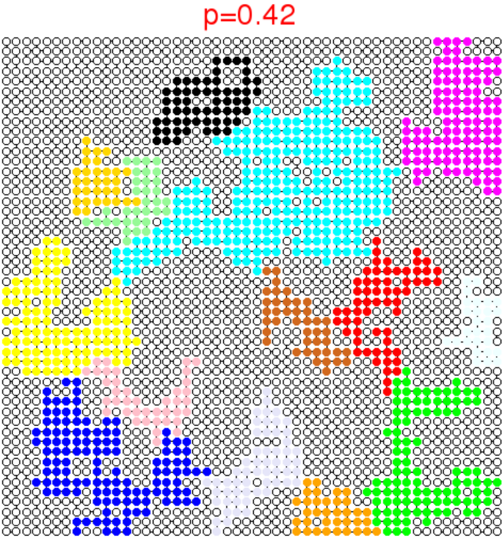
$p = 0.4$



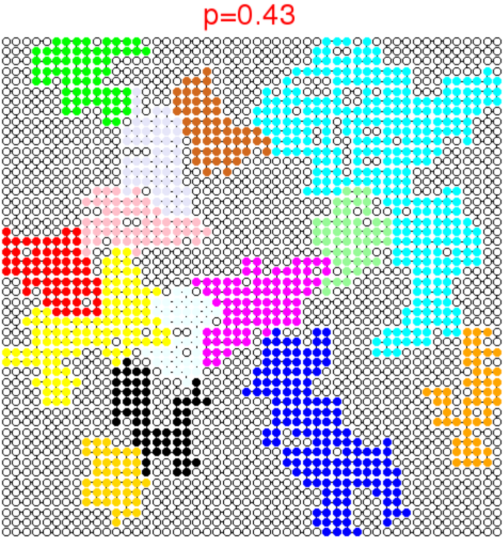
$p = 0.41$



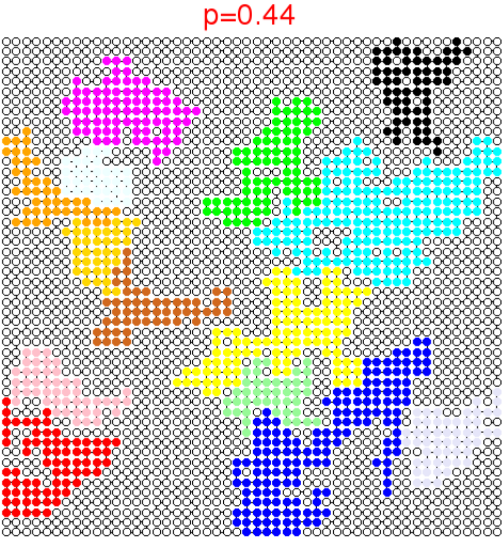
$p = 0.42$



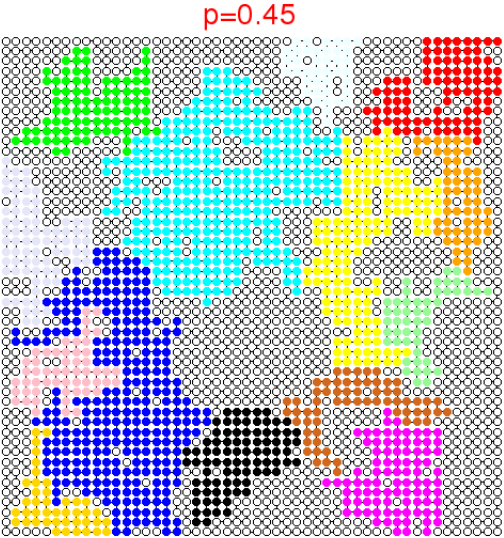
$p = 0.43$



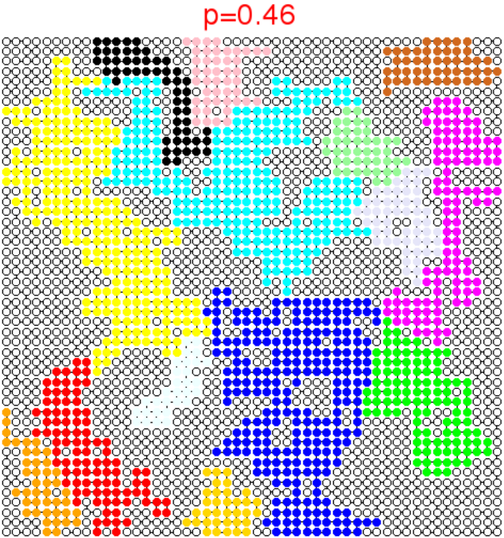
$p = 0.44$



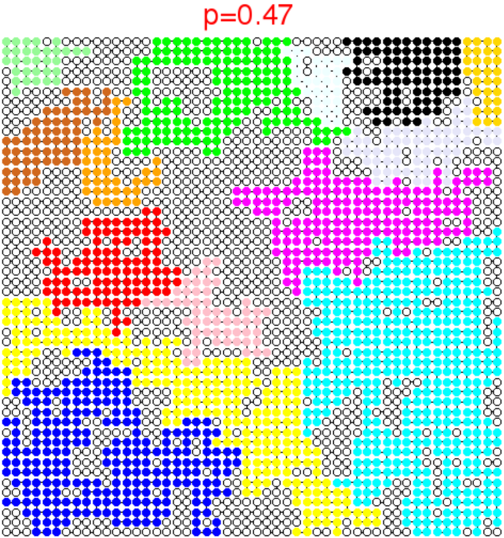
$p = 0.45$



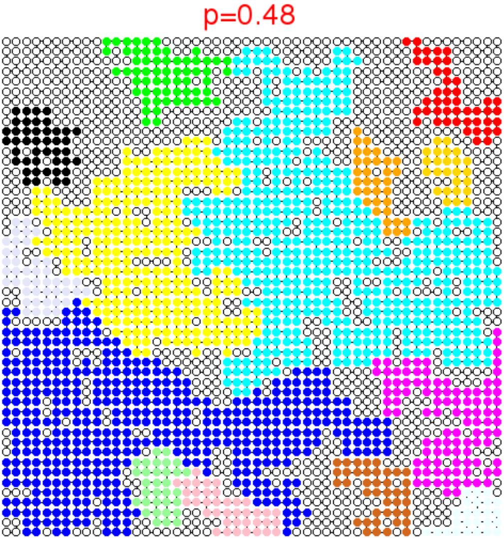
$p = 0.46$



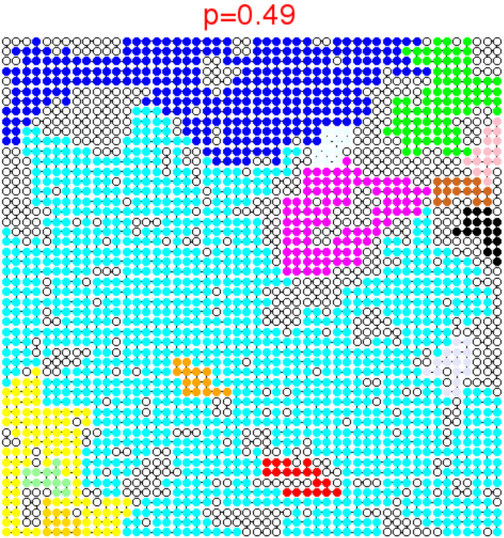
$p = 0.47$



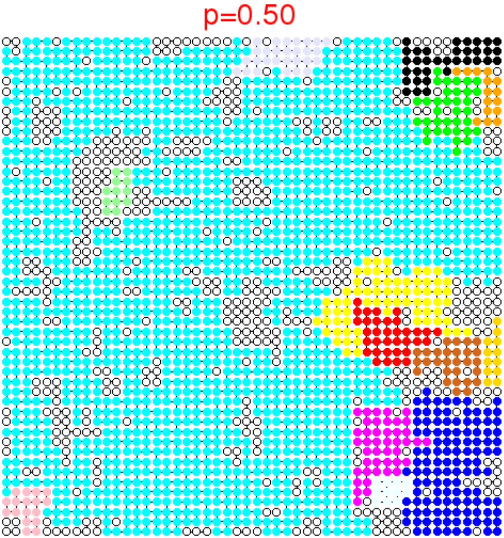
$p = 0.48$



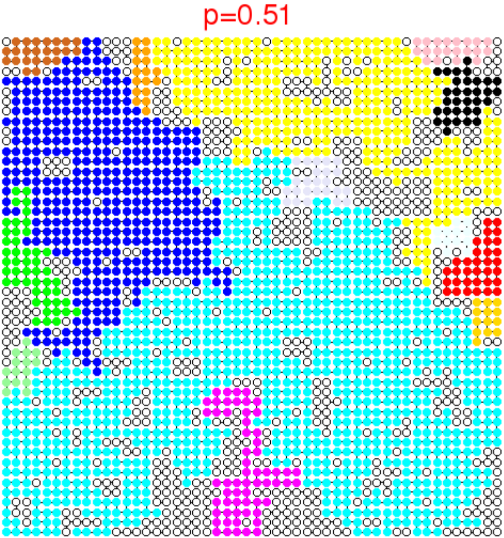
$p = 0.49$



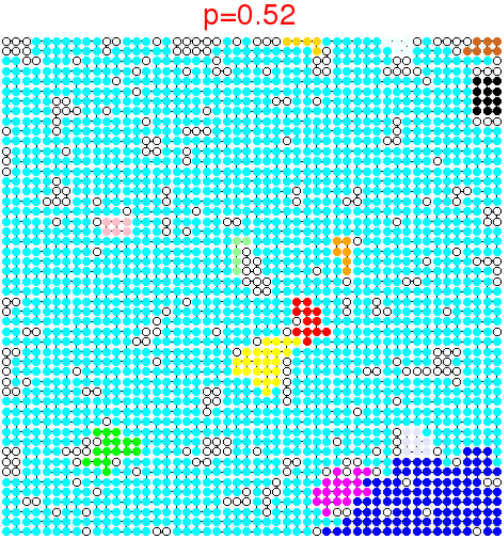
$p = 0.50$



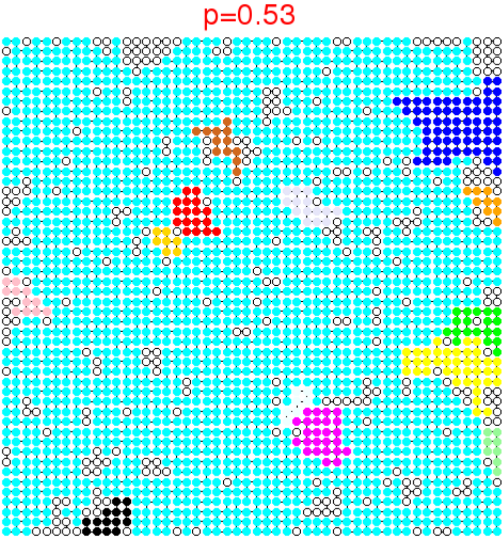
$p = 0.51$



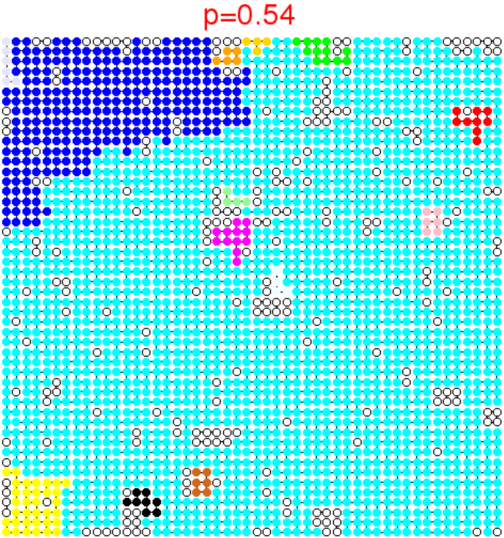
$p = 0.52$



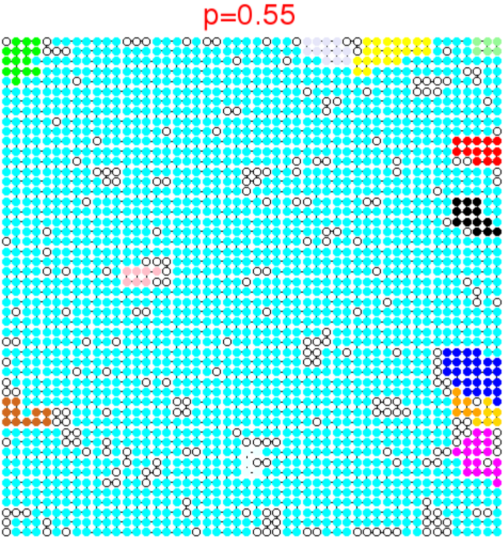
$p = 0.53$



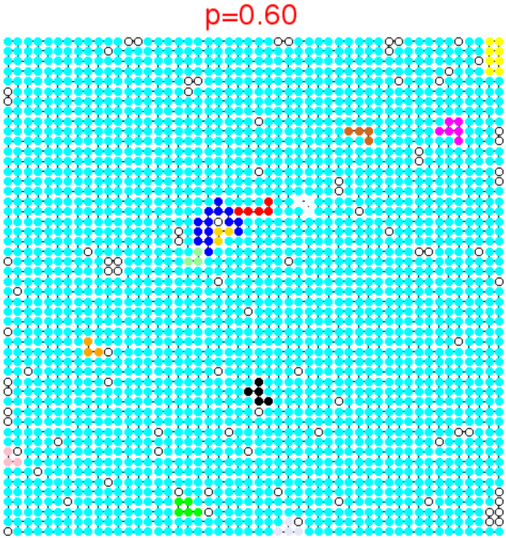
$p = 0.54$



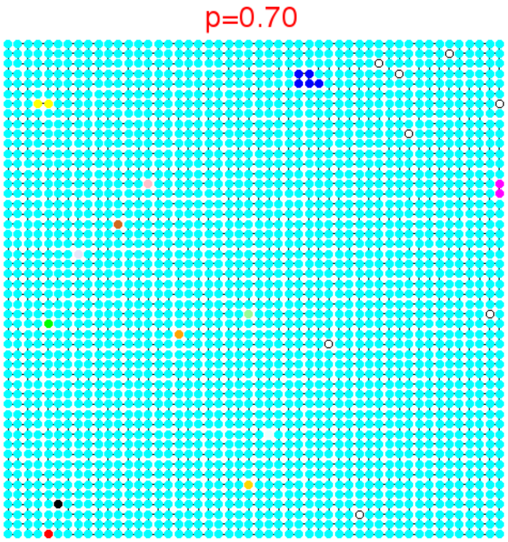
$p = 0.55$



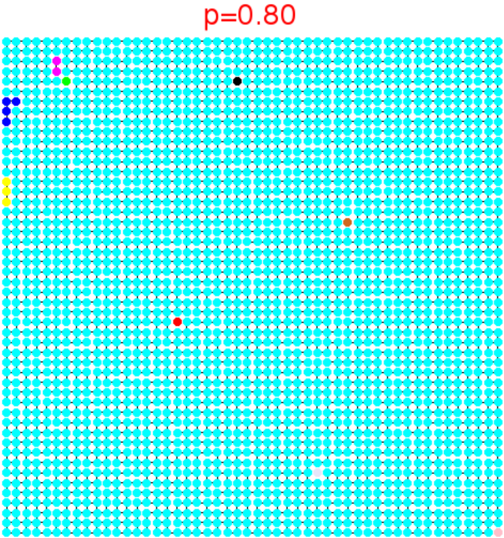
$p = 0.60$



$p = 0.70$



$p = 0.80$



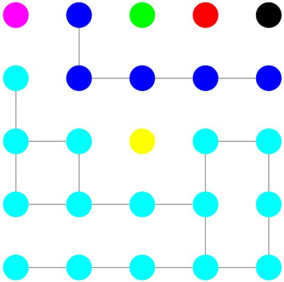
Qu'a-t-on observé ?

- Quand p est petit, il y a beaucoup de petits amas, les amas sont petits
- Quand p grandit, les amas grossissent jusqu'à $p = 0.5$
- Ensuite il y a un gros amas, de plus en plus gros, les autres amas sont de plus en plus petits

Une formule mathématique 1/2

$$\langle \frac{1}{C} \rangle = \frac{\text{nombre d'amas dans la boîte}}{\text{nombre de points dans la boîte}}.$$

La moyenne de l'inverse de la taille de l'amas d'un point est le quotient du nombre d'amas par l'effectif de la boîte



- 25 points
- 1 amas de taille 15
- 1 amas de taille 5
- 5 amas de taille 1
- 7 amas en tout

Taille moyenne de l'inverse de la taille de l'amas d'un point:

$$\frac{1}{25}(15 \times \frac{1}{15} + 5 \times \frac{1}{5} + 5 \times \frac{1}{1}) = \frac{7}{25}$$

Conséquence

On a montré que

$$\langle \frac{1}{C} \rangle = \frac{\text{nombre d'amas dans la boîte}}{\text{nombre de points dans la boîte}}.$$

On peut démontrer que lorsque la boîte devient très grande, la valeur moyenne de l'inverse de la taille de l'amas se rapproche d'une valeur κ_p qui ne dépend pas de la taille de la boîte: $\langle \frac{1}{C} \rangle \sim \kappa_p$. On en déduit que pour des grandes boîtes, le nombre d'amas dans la boîte est de l'ordre de

$$\kappa_p \times \text{nombre de points dans la boîte.}$$

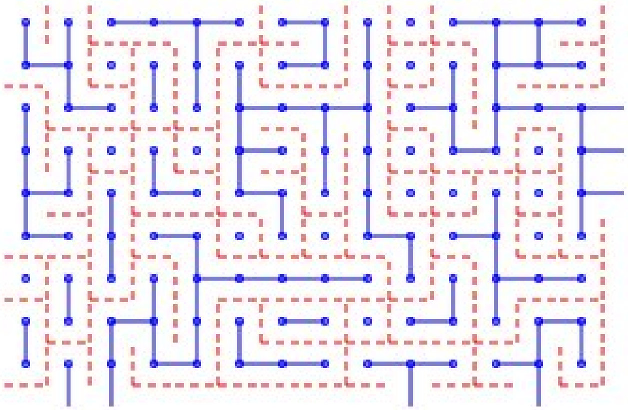
Classification

On distingue 3 cas

- la phase sous-critique $p < 0.5$
- la phase critique $p = 0.5$
- la phase sur-critique $p > 0.5$

On comprend facilement pourquoi, dans la phase sous-critique, quand la proportion p d'arêtes ouvertes grandit, la taille des amas grandit. Il est plus difficile de comprendre pourquoi, dans la zone surcritique, il y a un seul gros amas et plein de petits, et pas plusieurs gros.

La dualité du réseau



Un grand amas est encadré par un long pointillé rouge.
Or la proportion de pointillés rouges est $1 - p$ qui est petit quand p est grand. Donc il peut alors y avoir peu de grands amas.

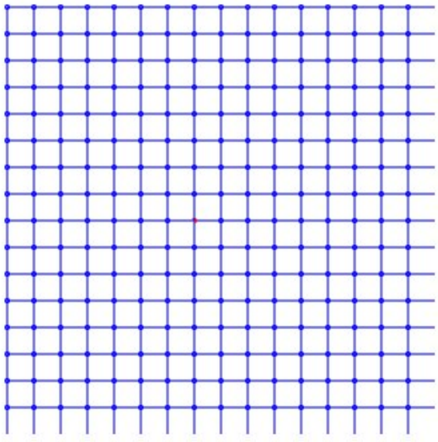
Quand le réseau devient infini

On distingue 3 cas

- la phase sous-critique $p < 0.5$: que des amas finis, petits
- la phase critique $p = 0.5$: que des amas finis, mais souvent gros
- la phase sur-critique $p > 0.5$: un unique amas infini, et des petits

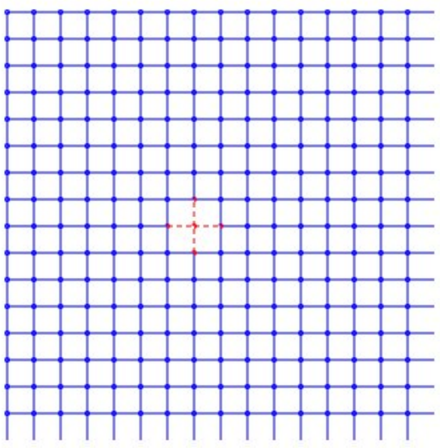
Dans la phase surcritique, on peut se demander quelle est la longueur du plus court chemin entre deux points de l'amas infini.

Les points à distance 0 de l'origine



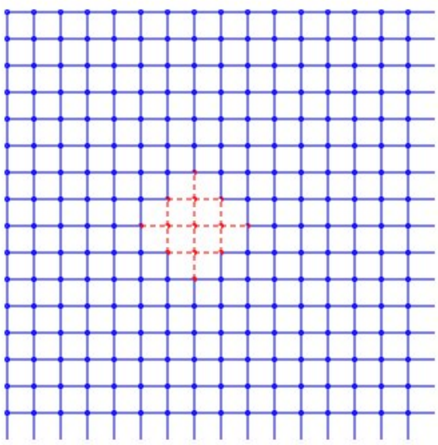
(ceux qu'on peut attendre en 0 pas)

Les points à distance 1 de l'origine

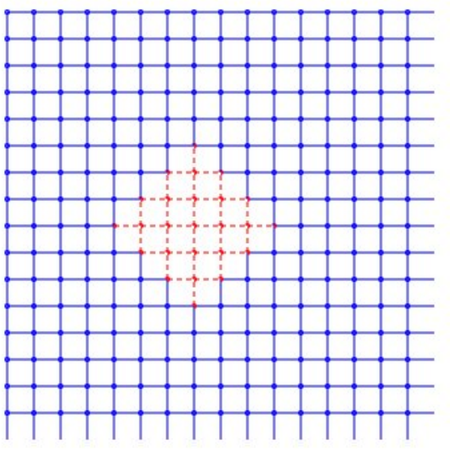


(ceux qu'on peut attendre en 1 pas)

Les points à distance 2 de l'origine

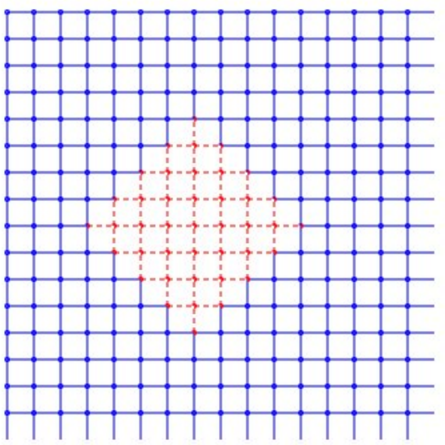


(ceux qu'on peut attendre en 2 pas)



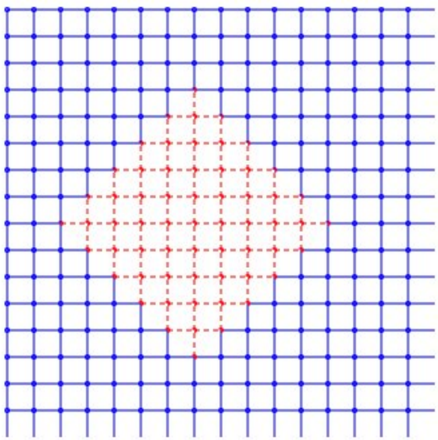
(ceux qu'on peut attendre en 3 pas)

Les points à distance 4 de l'origine



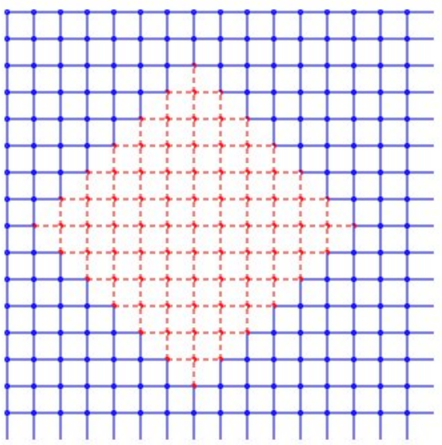
(ceux qu'on peut attendre en 4 pas)

Les points à distance 5 de l'origine



(ceux qu'on peut attendre en 5 pas)

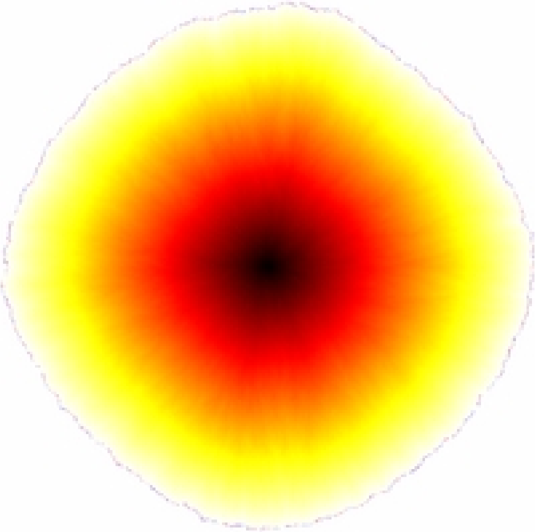
Les points à distance 6 de l'origine



(ceux qu'on peut attendre en 6 pas)

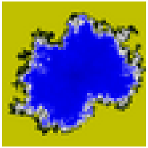
Qu'observe t'on sur le graphe aléatoire ?

Les points atteints en même temps

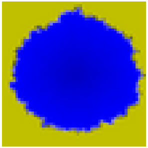


Deux points de même couleur sont atteints en même temps

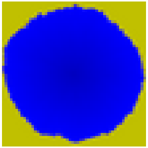
Quand p varie...



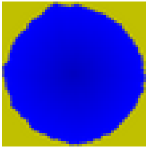
Forme 0.53



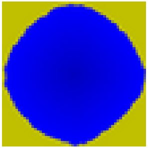
Forme 0.62



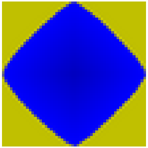
Forme 0.72



Forme 0.81



Forme 0.91



Forme 0.99