

Table des matières

Avant-propos	i
Table des matières	iii
Notations	xiii
1 Compléments d'analyse	1
1.1 Grand O , petit o : des amis fidèles	1
1.1.1 La notation grand O	1
1.1.2 La notation petit o	2
1.1.3 Équivalence de deux fonctions, de deux suites	3
1.2 Convergence de séries et d'intégrales	4
1.2.1 Séries à termes positifs	4
1.2.2 Convergences et divergences triviales	5
1.2.3 Critère de Cauchy	6
1.2.4 Séries absolument convergentes	7
1.2.5 Outils pour les séries semi-convergentes	7
1.2.6 Bref rappel sur l'intégrale de Riemann	8
1.2.7 Lien série-intégrale	10
1.3 La droite réelle achevée	10
1.4 Limite supérieure	12
1.4.1 Limites supérieures, inférieures d'une suite	12
1.4.2 Limites supérieures, inférieures d'ensembles	16
1.5 Compléments sur la compacité	17
1.5.1 Le procédé diagonal d'extraction	17
1.5.2 Le théorème de Dini-Polyà	18
1.6 Exercices d'analyse	18
1.6.1 Exercices corrigés	18
1.6.2 Exercices non corrigés	19

2 Un peu de théorie de la mesure	21
2.1 Tribus	21
2.1.1 Axiomes de base	21
2.1.2 Propriétés	22
2.1.3 Sous-tribus	22
2.1.4 Opérations sur les tribus	22
2.1.5 Tribu borélienne, fonctions mesurables	23
2.2 Mesures	28
2.2.1 Algèbres	28
2.2.2 Espace mesuré	28
2.2.3 Masse de Dirac	31
2.2.4 Mesure de comptage	31
2.2.5 Opérations simples	32
2.2.6 Mesure image	32
2.2.7 Extension d'une mesure – mesure de Lebesgue	32
2.3 Convergence et mesurabilité	34
2.3.1 Tribu borélienne de $\bar{\mathbb{R}}$	34
2.3.2 Importance de la séparabilité de \mathbb{R} (et $\bar{\mathbb{R}}$)	35
2.3.3 Convergence et mesurabilité	35
2.4 Exercices de théorie de la mesure	36
2.4.1 Exercices corrigés	36
2.4.2 Exercices non corrigés	39
3 Espace probabilisé	41
3.1 Espace probabilisé	41
3.2 Partitions et probabilités	43
3.3 Probabilité conditionnelle	43
3.3.1 Conditionnements en chaîne	44
3.3.2 Conditionnement par tous les cas possibles	45
3.3.3 Formule de Bayes	45
3.4 Indépendance	46
3.4.1 Événements indépendants	46
3.4.2 Tribus indépendantes	46
3.4.3 Indépendance et tribus engendrées	47
3.5 Théorème $\lambda - \pi$ de Dynkin (*)	48
3.6 Premiers exercices de probabilité	50
3.6.1 Exercices corrigés	50
3.6.2 Exercices non corrigés	52

4 Intégrales	55
4.1 Définition de l'intégrale et propriétés de base	55
4.1.1 Définition	55
4.1.2 Propriétés de base de l'intégrale	56
4.1.3 Les grands théorèmes	57
4.2 Intégration sur un ensemble	58
4.3 Quelques cas particuliers importants	58
4.3.1 Intégration par rapport à une masse de Dirac	58
4.3.2 Intégration par rapport à la mesure de comptage	59
4.3.3 Fonctions simples (ou fonctions étagées)	61
4.3.4 Intégration par rapport à une somme de deux mesures .	61
4.4 Lien avec l'intégrale de Riemann	62
4.5 Intégrale d'une fonction à valeurs complexes	64
4.6 Identifier des mesures par leurs intégrales	65
4.7 Applications aux intégrales à paramètre	66
4.7.1 Continuité d'une intégrale dépendant d'un paramètre .	66
4.7.2 Dérivabilité d'une intégrale dépendant d'un paramètre .	66
4.7.3 Exercice : la fonction Gamma	67
4.7.4 Holomorphie d'une intégrale dépendant d'un paramètre	70
4.8 Mesures à densité	72
4.8.1 Définition et premières propriétés	72
4.8.2 Décomposition de Lebesgue	73
4.9 Le théorème de transfert	74
4.10 Mesure produit	75
4.10.1 Construction de la mesure produit	76
4.10.2 Théorèmes de Fubini et Tonelli	78
4.10.3 Associativité de la mesure produit	81
4.10.4 Convolution de mesures	81
4.11 Théorèmes généraux et mesure de comptage	82
4.12 La mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^d	83
4.12.1 Transformations affines	83
4.12.2 Exercice : la fonction Beta	85
4.12.3 Changement de variables C^1	87
4.12.4 Intégration des fonctions radiales	88
4.13 Preuve des propriétés de base de l'intégrale	90
4.13.1 Premiers résultats	90
4.13.2 Démonstration du théorème de Beppo Levi	91
4.13.3 Preuve de la linéarité	92
4.14 Premiers exercices d'intégration	93
4.14.1 Exercices corrigés	93
4.14.2 Exercices non corrigés	98

5 Lois des variables aléatoires	103
5.1 Notions générales	103
5.1.1 Fonction de répartition	104
5.1.2 Tribu engendrée par une ou plusieurs variables aléatoires	111
5.2 Indépendance des variables aléatoires	112
5.2.1 Retour sur l'indépendance des tribus	113
5.2.2 Vecteurs aléatoires indépendants	114
5.2.3 Application : loi 0–1 de Kolmogorov	115
5.2.4 Variables aléatoires indépendantes et convolutions . . .	116
5.3 Variables aléatoires discrètes	117
5.3.1 Fonction d'une variable aléatoire discrète	119
5.4 Variables et vecteurs aléatoires à densité	120
5.4.1 Premières propriétés	120
5.4.2 Densités et lois marginales	120
5.4.3 Indépendance et densités	121
5.5 Variables et lois discrètes classiques	123
5.5.1 Indicatrice d'un événement	123
5.5.2 Mesure de Dirac	123
5.5.3 Loi de Bernoulli	123
5.5.4 Loi uniforme sur un ensemble	123
5.5.5 Loi binomiale	124
5.5.6 Loi géométrique	125
5.5.7 Loi de Poisson	126
5.5.8 Loi hypergéométrique	126
5.6 Lois à densité usuelles	127
5.6.1 Loi uniforme	127
5.6.2 Loi gaussienne	128
5.6.3 Loi exponentielle	129
5.6.4 Loi de Cauchy	130
5.6.5 Loi Gamma	131
5.6.6 Loi Beta	132
5.6.7 Exemple	133
5.7 Loi 0–1 de Hewitt et Savage	134
5.7.1 Le théorème de Hewitt et Savage sur l'espace canonique	134
5.7.2 Loi d'un processus	136
5.8 Exercices sur les lois des variables aléatoires	137
5.8.1 Exercices corrigés	137
5.8.2 Exercices non corrigés	139

6 Espérances et calculs	143
6.1 Rappels sur la construction de l'espérance	143
6.2 Propriétés élémentaires	143
6.3 Application aux inégalités classiques	144
6.3.1 Inégalité de Markov	144
6.3.2 Formule de Poincaré et inégalités de Bonferroni	144
6.3.3 Application de la formule de Poincaré au problème des dérangements	147
6.4 Théorèmes de transfert	148
6.4.1 Calcul de l'espérance d'une variable aléatoire discrète .	148
6.4.2 Calcul de l'espérance d'une variable aléatoire à densité .	149
6.5 Convexité	150
6.5.1 Rappels sur la convexité	150
6.5.2 Inégalité de Jensen	152
6.6 Intégrale et queue de distribution	153
6.7 Moments d'ordre 2	154
6.7.1 Covariance et variance	155
6.7.2 Matrice de covariance	157
6.7.3 Espérance et indépendance	158
6.7.4 Inégalité de Chebychev	160
6.8 Lois images par des transformations affines	160
6.8.1 Exemple fondamental	160
6.8.2 Application aux lois gaussiennes	161
6.8.3 Application : convolution de deux lois à densité	162
6.9 Loi image par un C^1 -difféomorphisme	164
6.9.1 Compléments méthodologiques	164
6.10 Premiers moments des lois discrètes usuelles	168
6.10.1 Indicatrice d'un événement	168
6.10.2 Loi binomiale	168
6.10.3 Loi géométrique	169
6.10.4 Loi de Poisson	169
6.10.5 Loi hypergéométrique	170
6.11 Calcul des moments des lois à densité usuelles	171
6.11.1 Loi uniforme sur un segment	171
6.11.2 Loi gaussienne	172
6.11.3 Loi Gamma	173
6.11.4 Loi exponentielle	173
6.11.5 Loi Beta	173
6.11.6 Loi de Cauchy	174
6.12 Exercices détaillés	174
6.12.1 Loi de Dirichlet	174
6.12.2 Polynômes de Bernstein	177

6.13	Exercices sur les espérances	178
6.13.1	Exercices corrigés	178
6.13.2	Exercices non corrigés	183
7	Espaces \mathcal{L}^p et L^p	187
7.1	De \mathcal{L}^p à L^p	187
7.1.1	Inégalité de Hölder	187
7.1.2	Inégalité triangulaire (ou inégalité de Minkowski)	188
7.2	Complétude de L^p	191
7.3	Théorèmes d'approximation	194
7.4	Exercices sur les espaces \mathcal{L}^p et L^p	195
7.4.1	Exercices corrigés	195
7.4.2	Exercices non corrigés	196
8	Convolution et Fourier	199
8.1	Produit de convolution	199
8.1.1	Convolution dans \mathcal{L}^1	200
8.1.2	Autres produits	201
8.1.3	Approximations de l'unité	202
8.1.4	Régularisation	203
8.2	Transformée de Fourier	204
8.2.1	Propriétés élémentaires	205
8.2.2	Théorème d'inversion	206
8.3	Exercices : convolution et Fourier	207
8.3.1	Exercices corrigés	207
8.3.2	Exercices non corrigés	208
9	Fonction caractéristique	209
9.1	Fonction génératrice d'une variable entière	209
9.1.1	Fonction génératrice et indépendance	210
9.1.2	Calculs de fonctions génératrices	210
9.1.3	Fonction génératrice et loi	211
9.1.4	Application : convolution de lois de Poisson	211
9.1.5	Fonction génératrice et espérance	212
9.2	Fonctions caractéristiques	212
9.2.1	Motivations	212
9.2.2	Propriétés des fonctions caractéristiques	215
9.2.3	Fonction caractéristique et indépendance	217
9.2.4	Fonction caractéristique et moments	218
9.2.5	Fonctions caractéristiques des variables aléatoires à valeurs dans \mathbb{N}	219
9.2.6	Quelques fonctions caractéristiques de mesures à densité	219

9.3	Transformée de Laplace	223
9.4	Application aux marches aléatoires	227
9.4.1	Transience et récurrence	228
9.4.2	Marche aléatoire simple sur \mathbb{Z}^d	232
9.5	Exercices sur les fonctions caractéristiques	233
9.5.1	Exercices corrigés	233
9.5.2	Exercices non corrigés	234
10	Lois des grands nombres	237
10.1	Convergence presque sûre	237
10.1.1	Rappels d'analyse	238
10.1.2	Limites supérieures, inférieures d'ensembles	238
10.2	Convergence en probabilité	240
10.2.1	Comparaison avec les autres modes de convergence	240
10.2.2	Loi faible des grands nombres	241
10.3	Lemmes de Borel-Cantelli	244
10.3.1	Premier lemme de Borel-Cantelli	244
10.3.2	Deuxième lemme de Borel-Cantelli	245
10.4	Lois fortes des grands nombres	247
10.4.1	Deux lois fortes des grands nombres	248
10.4.2	Probabilités et fréquences asymptotiques	250
10.4.3	Exercice : une preuve de la loi forte des grands nombres	250
10.5	Exercices sur la convergence presque sûre	255
10.5.1	Exercices corrigés	255
10.5.2	Exercices non corrigés	261
11	Convergence en loi	265
11.1	Convergence en loi	265
11.1.1	Définition	265
11.1.2	Premiers exemples	266
11.1.3	Théorème de Portmanteau	269
11.1.4	Lien avec les autres modes de convergence	274
11.2	Convergence et fonctions caractéristiques	276
11.2.1	Critère de convergence	276
11.2.2	Théorème de continuité de Lévy	276
11.2.3	Une application du théorème de Lévy	277
11.3	Théorème central limite en dimension 1	277
11.4	Preuve des théorèmes de Lévy	279
11.4.1	Tension	279
11.4.2	Théorèmes de Lévy	281
11.5	Exercices sur la convergence en loi	283
11.5.1	Exercices corrigés	283

11.5.2 Exercices non corrigés	285
12 Vecteurs gaussiens	287
12.1 Image affine d'un vecteur gaussien	287
12.2 Exemple fondamental	288
12.3 Loi gaussienne	288
12.4 Loi gaussienne et indépendance	290
12.5 Loi gaussienne à densité	291
12.6 Fonction caractéristique, vecteurs gaussiens	292
12.7 Théorème central limite en dimension d	292
12.8 Convergence vers la loi du χ^2	293
12.8.1 Préliminaires	293
12.8.2 Le théorème de convergence	295
12.9 Exercices sur les vecteurs gaussiens	297
12.9.1 Exercices corrigés	297
12.9.2 Exercices non corrigés	298
13 Statistique	301
13.1 Estimateurs	303
13.1.1 Lois empiriques	303
13.1.2 Théorème de Glivenko–Cantelli	304
13.1.3 Choix d'un estimateur	307
13.2 Intervalle de confiance	311
13.3 Modèles paramétriques (non-bayésiens)	313
13.3.1 Maximum de vraisemblance	313
13.3.2 Méthode des moments	316
13.3.3 Méthode des moindres carrés (régression linéaire)	317
13.3.4 Exercice : recherche d'estimateurs	320
13.4 Modèles non-paramétriques	321
13.4.1 Les tests d'hypothèse du chi-deux	321
13.4.2 Les tests de Kolmogorov-Smirnov	328
13.4.3 Exercice : test du χ^2	330
13.5 Exercices de statistique	332
13.5.1 Exercices corrigés	332
13.5.2 Exercices non corrigés	334
14 Sommes de variables indépendantes	337
14.1 Théorèmes de Lindeberg et de Lyapounov	337
14.1.1 Théorème de Lindeberg	337
14.1.2 Condition de Lyapounov	340
14.2 Sommes et séries de variables indépendantes	341
14.2.1 Loi du zéro-un	341

14.2.2 Une inégalité maximale	341
14.2.3 Lien entre les modes de convergence	343
14.2.4 Critères de convergence	344
14.2.5 Inégalité de Hoeffding	346
14.3 Grandes déviations	348
14.4 Exercices sur les variables indépendantes	354
14.4.1 Exercices corrigés	354
14.4.2 Exercices non corrigés	356
A Rappels de dénombrement	357
A.1 Rappels de vocabulaire ensembliste	357
A.2 Applications et cardinaux : définitions et notations	358
A.3 Principes de base du dénombrement	359
A.3.1 Principe de bijection	359
A.3.2 Principe d'indépendance	359
A.3.3 Principe de partition	359
A.3.4 Lemme des bergers	360
A.4 Quelques résultats incontournables	360
A.4.1 Nombre d'applications de D dans A	360
A.4.2 Nombre de permutations de Ω	361
A.4.3 Nombre d'injections de D dans A	361
A.4.4 Nombre de parties de Ω possédant p éléments	362
A.4.5 Nombre total de parties de Ω	362
A.5 Équations et inéquations en entiers	363
A.6 Formule de Poincaré (aussi appelée formule du crible)	364
A.7 Développement d'un produit de sommes	365
A.7.1 Développement d'un produit dans un anneau	365
A.7.2 Formule du multinôme	365
A.8 Exercices	366
B Compléments	367
B.1 Équi-intégrabilité	367
B.2 Lemme de recouvrement de Vitali	370
B.2.1 Lemme de recouvrement de Vitali	370
B.2.2 Inégalité maximale de Hardy–Littlewood	372
B.2.3 Théorème de différentiation de Lebesgue	373
B.3 Régularité des mesures	374
B.4 Exercices	376
C Solutions des exercices corrigés	377

D Indications	461
D.1 Exercices d'analyse	461
D.2 Exercices de théorie de la mesure	462
D.3 Premiers exercices de probabilité	462
D.4 Premiers exercices d'intégration	465
D.5 Exercices sur les lois des variables aléatoires	467
D.6 Exercices sur les espérances	469
D.7 Exercices sur les espaces \mathcal{L}^p et L^p	470
D.8 Exercices : convolution et Fourier	471
D.9 Exercices sur les fonctions caractéristiques	472
D.10 Exercices sur la convergence presque sûre	472
D.11 Exercices sur la convergence en loi	474
D.12 Exercices sur les vecteurs gaussiens	475
D.13 Exercices de statistique	475
D.14 Exercices sur les variables indépendantes	476
E Tables	477
Bibliographie	481
Index	483