Chapitre 4

Intégrales

Jusqu'ici, nous n'avons parlé que de mesures et nullement d'intégrales. Le présent chapitre va combler cette lacune.

Nous commençons par donner la définition de l'intégrale dite "de Lebesgue[1]" et en énoncer les propriétés fondamentales. Afin de se concentrer sur la pratique, certains résultats seront admis dans un premier temps et démontrés à la fin du chapitre.

4.1 Définition de l'intégrale et propriétés de base

4.1.1 Définition

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré. Pour toute fonction mesurable positive f, on définit l'intégrale de f, notée $\int f \, d\mu$ ou encore $\int f(x) \, d\mu(x)$ par

$$\int f \, d\mu = \sup \sum_i \inf\{f(\omega); \omega \in \Omega_i\} \mu(\Omega_i), \tag{4.1}$$

où le supremum porte sur toutes les partitions mesurables finies de Ω, c'est-à-dire les partitions $(\Omega_i)_{i \in I}$ que l'on peut indexer par un ensemble fini I et telles que pour tout $i \in I$, $\Omega_i \in \mathcal{F}$. Observons que cette quantité peut être infinie.

Lorsque f prend des valeurs négatives, on écrit f comme différence de deux fonctions positives :

$$f = f^+ - f^-, \text{ où } f^+(\omega) = \max(f(\omega), 0) \text{ et } f^-(\omega) = \max(-f(\omega), 0).$$

Définition. Lorsque $\int f^+ \, d\mu$ et $\int f^- \, d\mu$ sont simultanément finies, on dit que f est intégrable et on peut définir

$$\int f \, d\mu = \int f^+ \, d\mu - \int f^- \, d\mu.$$

1. Henri Lebesgue (1875-1941) est un mathématicien français. Il a soutenu sa thèse "Intégrale, longueur, aire" en 1902, pendant qu'il était professeur de lycée à Nancy.

Lorsque $\int f^+ \, d\mu$ et $\int f^- \, d\mu$ sont, l'une finie, l'autre infinie, on s'autorise toutefois à écrire

- $\int f \, d\mu = +\infty$ si $\int f^+ \, d\mu = +\infty$ et $\int f^- \, d\mu < +\infty$.
- $\int f \, d\mu = -\infty$ si $\int f^+ \, d\mu < +\infty$ et $\int f^- \, d\mu = +\infty$.

4.1.2 Propriétés de base de l'intégrale

Définition. On dit qu'une propriété $\mathcal{P}$ relative aux points de Ω est vérifiée μ-presque partout s'il existe E mesurable avec $\mu(E) = 0$ tel que pour tout $x \in \Omega \backslash E$, $\mathcal{P}(x)$ est vérifiée. Au lieu de μ-presque partout, nous écrirons parfois μ-p.p.

On donne d'emblée sans démonstration les propriétés de base de l'intégrale :

- **Lien avec la mesure** :
  Pour tout ensemble A mesurable, on a $\int \mathbb{1}_A \, d\mu = \mu(A)$.
- **Positivité** :
  Si f et g sont intégrables avec $f \le g$ μ-presque partout, alors on a $\int f \, d\mu \le \int g \, d\mu$, avec égalité si et seulement si $f = g$ μ-presque partout. En particulier, si $f \ge 0$ μ-presque partout et $\int f \, d\mu = 0$, alors $f = 0$ μ-presque partout.
- **Linéarité** :
  Si f et g sont intégrables, α et β des réels, alors
  $$\int \alpha f + \beta \, d\mu = \alpha \int f \, d\mu + \beta \int g \, d\mu.$$
- **Convergence monotone (ou théorème de Beppo Levi [2])** :
  Si $(f_n)_{n \ge 1}$ est une suite croissante de fonctions mesurables positives convergeant presque partout vers f, alors la suite $(\int f_n \, d\mu)$ converge vers $\int f \, d\mu$ (la limite peut être infinie).

L'objectif prioritaire du lecteur est, nous semble-t-il, d'acquérir une bonne familiarité des propriétés de cette nouvelle intégrale. Aussi, afin de ne pas lasser par des preuves un peu techniques qui arriveraient avant que l'intérêt de l'outil soit réellement compris, nous reportons les preuves à une section ultérieure qui viendra en fin de chapitre.

Remarque. Pour définir l'intégrale (4.1), la mesurabilité de f n'est nullement requise, ce qui peut laisser perplexe. Cependant, pour que l'intégrale jouisse des propriétés intéressantes que nous venons d'énoncer, l'hypothèse de mesurabilité va servir, comme le constateront les courageux lecteurs de la dernière section. De plus, dans la pratique, nous n'intégrons que des fonctions mesurables.

2. Beppo Levi (1875-1961) est un mathématicien italien. Pas de trait d'union donc entre Beppo et Levi !

4.1.3 Les grands théorèmes : lemme de Fatou et convergence dominée

Théorème 4.1.1 (Lemme de Fatou[3]). *Pour toute suite $(f_n)_{n\geq 1}$ de fonctions mesurables positives, on a*

$$\int \varliminf_{n\to+\infty} f_n \, d\mu \leq \varliminf_{n\to+\infty} \int f_n \, d\mu.$$

Démonstration. Il suffit de poser $g_n = \inf_{k\geq n} f_k$. La suite $(g_n)_{n\geq 1}$ est une suite croissante, dont la limite est, par définition, $\lim_{n\to+\infty} g_n = \varliminf_{n\to+\infty} f_n$. On a pour tout n

$$f_n \geq g_n \quad \text{et donc} \quad \int f_n \, d\mu \geq \int g_n \, d\mu.$$

D'où

$$\varliminf_{n\to+\infty} \int f_n \, d\mu \quad \geq \quad \varliminf_{n\to+\infty} \int g_n \, d\mu.$$

Mais d'après le théorème de convergence monotone $\int g_n \, d\mu$ converge vers $\int g \, d\mu$, ce qui est le résultat voulu. Dans cette inégalité, les termes peuvent valoir $+\infty$. □

Théorème 4.1.2 (Convergence dominée). *Si $(f_n)_{n\geq 1}$ est une suite de fonctions mesurables convergeant presque partout vers f, et telle qu'il existe une fonction g intégrable vérifiant pour tout n, $|f_n| \leq g$ alors la suite $(\int f_n \, d\mu)$ converge vers $\int f \, d\mu$.*

Démonstration. Les f_n sont intégrables car dominées par g. Par suite, les fonctions $g + f_n$ et $g - f_n$ sont intégrables et positives : on peut leur appliquer le lemme de Fatou, ce qui donne

$$\int \varliminf_{n\to+\infty} (g + f_n) \, d\mu \leq \varliminf_{n\to+\infty} \int (g + f_n) \, d\mu$$

et

$$\int \varliminf_{n\to+\infty} (g - f_n) \, d\mu \leq \varliminf_{n\to+\infty} \int (g - f_n) \, d\mu$$

soit

$$\int g \, d\mu + \int f \, d\mu \leq \int g \, d\mu + \varliminf_{n\to+\infty} \int f_n \, d\mu$$

3. Mathématicien français (1878-1929). Avec sa thèse, *Séries trigonométriques et séries de Taylor*, c'est un des premiers utilisateurs de la théorie de l'intégration de Lebesgue.

et

$$\int g\ d\mu - \int f\ d\mu \leq \int g\ d\mu - \overline{\lim_{n\to+\infty}} \int f_n\ d\mu.$$

Comme $|\int g\ d\mu| < +\infty$, on peut simplifier et on obtient

$$\int f\ d\mu \leq \underline{\lim}_{n\to+\infty} \int f_n\ d\mu$$

et

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}} \int f_n\ d\mu \ \leq \int f\ d\mu$$

ce qui montre le résultat voulu. □

4.2 Intégration sur un ensemble

Pour tout ensemble mesurable A et toute fonction intégrable (ou positive) f, on note

$$\int_A f\ d\mu = \int f \mathbb{1}_A\ d\mu.$$

Théorème 4.2.1. *Si f est intégrable et si $(A_n)_{n\geq 1}$ est une partition dénombrable de Ω, alors*

$$\int f\ d\mu = \sum_{k=1}^{+\infty} \int_{A_k} f\ d\mu.$$

Démonstration. On pose $f_n = f \times \mathbb{1}_{\bigcup_{k=1}^{n} A_k} = f \times (\sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{A_k})$ et on applique le théorème de convergence dominée. □

4.3 Quelques cas particuliers importants

4.3.1 Intégration par rapport à une masse de Dirac

Théorème 4.3.1. *Soit $(\Omega, \mathcal{F})$ un espace mesurable. On suppose que le singleton $\{x\}$ est dans $\mathcal{F}$. Alors, pour toute fonction f mesurable, on a*

$$\int_\Omega f\ d\delta_x = f(x).$$

Démonstration. Par linéarité, comme $f = f^+ - f^-$, il suffit de traiter le cas où f est positive. Soit $(\Omega_i)_{i\in I}$ une partition mesurable finie. Posons $\mu = \delta_x$. Pour tout $i \in I$, on a

$$\mu(\Omega_i) \inf_{\Omega_i} f \leq \mu(\Omega_i) f(x).$$

En effet, si $x \notin \Omega_i$, les deux membres de l'égalité sont nuls. Sinon l'inégalité $\inf_{\Omega_i} f \leq f(x)$ est une conséquence de $x \in \Omega_i$. En faisant la somme sur $i \in I$, on obtient

$$\sum_{i\in I} \mu(\Omega_i) \inf_{\Omega_i} f \leq (\sum_{i\in I} \mu(\Omega_i)) f(x) = f(x),$$

d'où en passant au supremum sur toutes les partitions $\int f \, d\mu \leq f(x)$. Cependant, si l'on prend $I = \{1, 2\}$, $\Omega_1 = \{x\}$ et $\Omega_2 = \{x\}^c$, on a

$$\sum_{i\in I} \mu(\Omega_i) \inf_{\Omega_i} f = f(x),$$

d'où l'égalité voulue. □

4.3.2 Intégration par rapport à la mesure de comptage

Théorème 4.3.2. *Soit Ω un ensemble dénombrable. On note C la mesure de comptage sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$. Toute fonction définie sur Ω est mesurable. Pour toute fonction f positive, on a*

$$\int_\Omega f(\omega) \, dC(\omega) = \sum_{k\in\Omega} f(k),$$

où cette somme peut valoir $+\infty$. Dans le cas général, f est intégrable si et seulement si $\sum_{k\in\Omega} |f(k)| < +\infty$ et dans ce cas, on a encore l'égalité ci-dessus.

Démonstration. Soient f positive et $(\Omega_i)_{i\in I}$ une partition de Ω. On a

$$\begin{aligned} C(\Omega_i) \inf_{\Omega_i} f &= \sum_{k\in\Omega} \left(\mathbb{1}_{\Omega_i}(k) \inf_{\Omega_i} f \right) \\ &\leq \sum_{k\in\Omega} \left(\mathbb{1}_{\Omega_i}(k) f(k) \right). \end{aligned}$$

D'où en sommant sur I

$$\sum_{i\in I} C(\Omega_i) \inf_{\Omega_i} f \leq \sum_{i\in I} \sum_{k\in\Omega} \left(\mathbb{1}_{\Omega_i}(k) f(k) \right).$$

Cependant, par le théorème de Fubini, on a

$$\sum_{i\in I}\sum_{k\in\Omega}(\mathbb{1}_{\Omega_i}(k)f(k)) = \sum_{k\in\Omega}\left(\sum_{i\in I}\mathbb{1}_{\Omega_i}(k)f(k)\right) = \sum_{k\in\Omega} f(k)$$

d'où en passant au supremum

$$\int_\Omega f(\omega)\ dC(\omega) \leq \sum_{k\in\Omega} f(k).$$

Réciproquement soit F une partie finie de Ω. On considère la partition de cardinal $|F|+1$, formée des $|F|$ singletons de F et de F^c : elle donne lieu à une somme

$$\sum_{k\in F} f(k) + \inf_{F^c} f \geq \sum_{k\in F} f(k).$$

On en déduit

$$\int_\Omega f(\omega)\ dC(\omega) \geq \sum_{k\in F} f(k).$$

En prenant la borne supérieure sur toutes les parties finies de Ω, on obtient

$$\int_\Omega f(\omega)\ dC(\omega) \geq \sum_{k\in\Omega} f(k),$$

d'où l'égalité voulue. Dans le cas où f est de signe quelconque, la formule précédente appliquée à $|f|$ donne

$$\int_\Omega |f(\omega)|\ dC(\omega) = \sum_{k\in\Omega} |f(k)|.$$

Dans le cas où la dernière somme est finie, en appliquant cette fois la formule à f^+ et f^-, on a

$$\int_\Omega f^+(\omega)\ dC(\omega) = \sum_{k\in\Omega} f^+(k)$$

et

$$\int_\Omega f^-(\omega)\ dC(\omega) = \sum_{k\in\Omega} f^-(k).$$

Ces deux quantités sont finies car $f^+ \leq |f|$ et $f^- \leq |f|$: en faisant la différence, on obtient alors par linéarité

$$\int_\Omega f(\omega)\ dC(\omega) = \sum_{k\in\Omega} f(k).$$

□

4.3.3 Fonctions simples (ou fonctions étagées)

Définition. On appelle fonction simple, ou fonction étagée, toute combinaison linéaire d'indicatrices d'ensembles mesurables.

On peut dire aussi qu'une fonction simple est une fonction mesurable qui ne prend qu'un nombre fini de valeurs.

Lemme 4.3.3. *Toute fonction mesurable positive f (éventuellement infinie) peut s'écrire comme limite simple d'une suite croissante de fonctions simples (f_n).*

Démonstration. Une idée naturelle est de chercher f_n sous la forme $f_n = \phi_n \circ f$, où ϕ_n est une suite croissante de fonctions qui convergent ponctuellement vers l'identité, chaque fonction f_n ne prenant qu'un nombre fini de valeurs. On définit sur $[0, +\infty]$ une fonction ϕ_n par

$$\phi_n(x) = 2^{-n}\lfloor 2^n x\rfloor \mathbb{1}_{[0,n]}(x) \text{ pour } x < +\infty \text{ et } \phi_n(+\infty) = n.$$

La prise de la partie entière d'un multiple, suivie d'une division, est classique dans l'approximation par des rationnels. Plus originale, l'intervention des 2^n est, on le verra, destinée à assurer la monotonie. Évidemment la suite $(\phi_n(\infty))_{n\geq 1}$ tend en croissant vers $+\infty$. Soit $x \geq 0$. Il est immédiat que $\mathbb{1}_{[0,n+1]}(x) \geq \mathbb{1}_{[0,n]}(x)$. Posons $y = 2^n x$. On a $y \geq \lfloor y\rfloor$, donc $2y \geq 2\lfloor y\rfloor$. Comme $2\lfloor y\rfloor$ est entier, on a aussi $\lfloor 2y\rfloor \geq 2\lfloor y\rfloor$, ce qui nous donne finalement $\phi_{n+1}(x) \geq \phi_n(x)$. D'autre part pour $n \geq x$, on a $x - 2^{-n} \leq \phi_n(x) \leq x$, donc $\phi_n(x)$ tend vers x. Il suffit alors de poser $f_n(x) = \phi_n(f(x))$. □

Remarque. On peut montrer que la convergence précédente est uniforme.

4.3.4 Intégration par rapport à une somme de deux mesures

Théorème 4.3.4. *Soient $(\Omega, \mathcal{F})$ un espace mesurable, μ et ν deux mesures sur $(\Omega, \mathcal{F})$. Soit f une fonction $(\Omega, \mathcal{F})$-$(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mesurable positive. On a*

$$\int_\Omega f \, d(\mu + \nu) = \int_\Omega f \, d\mu + \int_\Omega f \, d\nu. \tag{4.2}$$

Dans le cas où f est de signe quelconque, si $\int_\Omega |f| \, d\mu$ et $\int_\Omega |f| \, d\nu$ sont finies, alors f est intégrable par rapport à $\mu + \nu$ et on a encore (4.2).

Démonstration. Dans le cas où f est l'indicatrice d'un élément de $\mathcal{F}$, l'identité (4.2) découle de la définition de la mesure somme de deux mesures et de la valeur de l'intégrale d'une indicatrice. Par linéarité, la formule (4.2) est encore vraie si f est une combinaison linéaire d'indicatrices d'éléments de $\mathcal{F}$, autrement dit une fonction simple. En utilisant le lemme 4.3.3 et le théorème de convergence monotone, il s'ensuit que l'identité (4.2) est vraie pour toute fonction mesurable positive. Comme précédemment, le cas général s'en déduit en séparant partie positive et partie négative. □

4.4 Lien avec l'intégrale de Riemann

On a ici $(\Omega, \mathcal{F}, \mu) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$.

Théorème 4.4.1. *Soit f une fonction continue par morceaux sur un intervalle compact $[a,b]$. Alors*

$$\int_{[a,b]} f(x)\ d\lambda(x) = \int_a^b f(t)\ dt.$$

Ainsi, on a identité entre les intégrales de Lebesgue (à gauche) et Riemann (à droite) pour les fonctions continues par morceaux sur un intervalle compact.

Démonstration. Grâce à la relation de Chasles et la linéarité de l'intégrale de Lebesgue, on peut se ramener au cas où f est continue sur $[a,b]$. Posons

$$f_n(x) = f\left(a + \frac{b-a}{n} \lfloor \frac{n(x-a)}{b-a} \rfloor \right).$$

Comme f est continue sur $[a,b]$, elle y est bornée en module par une constante M. Comme f est continue sur $[a,b]$, $f_n(x)$ converge vers $f(x)$ pour tout $x \in [a,b]$. Comme $|f_n| \leq M \mathbb{1}_{[a,b]}$, le théorème de convergence dominée assure que $\int_{[a,b]} f_n(x)\ d\lambda(x)$ converge vers $\int_{[a,b]} f(x)\ d\lambda(x)$. Cependant

$$\int_{[a,b]} f_n(x)\ d\lambda(x) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(a + k\frac{b-a}{n}).$$

On reconnaît une somme de Riemann qui converge vers $\int_a^b f(x)\ dx$. Finalement, $\int_{[a,b]} f(x)\ d\lambda(x) = \int_a^b f(t)\ dt$. □

Théorème 4.4.2. *Soit f une fonction positive continue par morceaux sur un intervalle semi-ouvert $[a,b[$ (b peut valoir $+\infty$). Alors l'intégrale impropre $\int_a^b f(t)\ dt$ est convergente si et seulement si $\int_{[a,b[} f(x)\ d\lambda(x) < +\infty$. Dans ce cas*

$$\int_{[a,b[} f(x)\ d\lambda(x) = \int_a^b f(t)\ dt.$$

Démonstration. Soit (b_n) une suite de réels de $[a,b[$ tendant vers b. La suite $(f\mathbb{1}_{[a,b_n]})$ converge en croissant vers $f\mathbb{1}_{[a,b[}$, donc d'après le théorème de convergence monotone, $\int_{[a,b[} f(x)\ d\lambda(x) < +\infty$ est la limite de $\int_{[a,b_n]} f(x)\ d\lambda(x)$. Par définition d'une intégrale impropre, $\int_a^b f(t)\ dt$ est la limite de $\int_a^{b_n} f(t)\ dt$, si elle est finie. Comme $\int_{[a,b_n]} f(x)\ d\lambda(x) = \int_a^{b_n} f(t)\ dt$, le résultat s'ensuit. □

Théorème 4.4.3. *Soit f une fonction continue par morceaux sur un intervalle semi-ouvert $[a,b[$ (b peut valoir $+\infty$). Alors f est intégrable sur $[a,b[$ par rapport à la mesure de Lebesgue si et seulement si l'intégrale impropre $\int_a^b |f(t)|\, dt$ est convergente. Dans ce cas*

$$\int_{[a,b[} f(x)\; d\lambda(x) = \int_a^b f(t)\; dt.$$

Démonstration. Dire que f est intégrable sur $[a,b[$ par rapport à la mesure de Lebesgue revient à dire que $\int_{[a,b[} |f(x)|\; d\lambda(x) < +\infty$. Le premier point découle donc du théorème précédent. Soit (b_n) une suite de réels de $[a,b[$ tendant vers b. La suite $(f\mathbb{1}_{[a,b_n]})$ converge vers $f\mathbb{1}_{[a,b[}$ et $|f\mathbb{1}_{[a,b_n]}| \leq |f|$, donc d'après le théorème de convergence dominée $\int_{[a,b[} f(x)\; d\lambda(x)$ est la limite de $\int_{[a,b_n]} f(x)\; d\lambda(x)$, c'est-à-dire la limite de $\int_a^{b_n} f(x)\; dx$, qui est $\int_a^b f(x)\; dx$, par définition d'une intégrale impropre. □

Remarque. Il est important de remarquer que la convergence de l'intégrale impropre $\int_a^b f(x)\; dx$ n'entraîne PAS l'intégrabilité de f.

Ainsi, on verra en exercice que l'intégrale de 0 à $+\infty$ de $\frac{\sin x}{x}$ est une intégrale de Riemann impropre convergente. Cependant, $\frac{\sin x}{x}$ n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}_+$ pour la mesure de Lebesgue.

À titre culturel, on peut noter le résultat suivant dû à Lebesgue :

Théorème 4.4.4. *Soit f une fonction mesurable et bornée sur un intervalle $[a,b]$. Alors f est Riemann-intégrable sur $[a,b]$ si et seulement si l'ensemble des points de discontinuité de f est de mesure de Lebesgue nulle.*

Démonstration. On va se contenter de démontrer que si l'ensemble des points de discontinuité de f est de mesure de Lebesgue nulle, alors f est Riemann-intégrable sur $[a,b]$, c'est-à-dire que si on a

$$a = a_0^n \leq x_0^n \leq a_1^n \leq x_1^n \leq \dots x_{n-1}^n \leq a_n^n = b,$$

et que la suite $e_n = \max\limits_{1\leq i\leq n} (a_i^n - a_{i-1}^n)$ est de limite nulle, alors la suite $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} (a_k - a_{k-1}) f(x_k)$ converge toujours vers une même limite ne dépendant pas des subdivisions choisies. On procède comme dans la preuve du théorème 4.4.1 : soit M une constante bornant f sur $[a,b]$. Si l'on pose $f_n = \sum\limits_{k=1}^{n} f(x_i^n)\mathbb{1}_{]a_{i-1}^n, a_i^n[}$, alors f_n converge vers f en les points de continuité de f, donc presque partout. Comme $|f_n| \leq M$, le théorème de convergence dominée s'applique et $S_n = \int_{[a,b]} f_n\; d\lambda$ converge vers $\int_{[a,b]} f\; d\lambda$. □

Ce résultat illustre bien la supériorité de l'intégrale de Lebesgue sur l'intégrale de Riemann. Pour vous en convaincre, essayez donc de montrer, à l'aide de la seule définition de la Riemann-intégrabilité, la convergence des sommes de Riemann associées à la fonction $x \mapsto \{\frac{1}{x}\}$ sur $]0,1]$. (La valeur de l'intégrale sera calculée en exercice.)

Terminons par quelques remarques élémentaires : l'intérêt de l'intégrale de Riemann, c'est qu'on a appris (dans certains cas) à la calculer ! Plus précisément, le théorème fondamental de l'analyse nous enseigne que si F est une primitive de f sur $[a,b]$ (c'est-à-dire si $F' = f$), alors

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\ dx.$$

En particulier, si ϕ est une fonction monotone strictement croissante, la dérivée de $F \circ \phi$ est $\phi'.(f \circ \phi)$, ce qui nous dit que $F \circ \phi$ est une primitive de $\phi'.(f \circ \phi)$, et donc

$$\int_a^b \phi'(x).(f \circ \phi)(x)\ dx = F(\phi(b)) - F(\phi(a)) = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x)\ dx.$$

C'est la formule dite "de changement de variable".

4.5 Intégrale d'une fonction à valeurs complexes

Définition. Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré et f une fonction de Ω dans $\mathbb{C}$. On dit que f est mesurable sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ si ses parties réelle et imaginaire le sont. On dit que f est intégrable sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ si ses parties réelles le sont. Ainsi si f s'écrit $f = f_1 + if_2$ où f_1 et f_2 sont des fonctions à valeurs réelles mesurables, on peut définir $\int_\Omega f\ d\mu$ par

$$\int_\Omega f\ d\mu = \left(\int_\Omega f_1\ d\mu\right) + i\left(\int_\Omega f_2\ d\mu\right).$$

Il n'est alors pas très difficile de voir que les fonctions intégrables sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ forment un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et que l'intégrale ainsi définie est $\mathbb{C}$-linéaire. Quelles que soient les fonctions complexes intégrables sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ et quels que soient $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, on a

$$\int_\Omega (\alpha f + \beta g)\ d\mu = \alpha \int_\Omega f\ d\mu + \beta \int_\Omega g\ d\mu.$$

Si l'on sait que f est mesurable (c'est-à-dire que la partie réelle f_1 et la partie imaginaire f_2 de f le sont), alors comme

$$\frac{|f_1| + |f_2|}{2} \le |f| \le |f_1| + |f_2|,$$

f sera intégrable si et seulement si $|f|$ l'est.

Enfin, il sera souvent utile de connaître le résultat suivant : si a et b sont des nombres réels avec $a < b$ et z un nombre complexe non nul, on a

$$\int_{[a,b]} e^{zx}\ d\lambda(x) = \frac{e^{bz} - e^{az}}{z}.$$

Dans la suite, la plupart des théorèmes seront énoncés pour des fonctions à valeurs réelles, mais dans le cas de fonctions à valeurs complexes, on pourra souvent démontrer un résultat analogue en considérant séparément les parties réelle et imaginaire.

Par exemple, on peut énoncer :

Théorème 4.5.1 (Convergence dominée pour des fonctions complexes)**.** *Si $(f_n)_{n\ge 1}$ est une suite de fonctions mesurables complexes convergeant presque partout vers f, et telle qu'il existe une fonction g intégrable vérifiant, pour tout n, $|f_n| \le g$ alors la suite $\left(\int f_n\ d\mu\right)_{n\ge 1}$ converge vers $\int f\ d\mu$.*

Démonstration. Comme $|\mathrm{Re}\ f_n| \le |f_n| \le g$, on peut appliquer le théorème de convergence dominée à $(\mathrm{Re}\ f_n)_{n\ge 1}$. Idem pour $(\mathrm{Im}\ f_n)_{n\ge 1}$. □

4.6 Identifier des mesures par leurs intégrales

Les intégrales caractérisent des mesures.

Théorème 4.6.1. *Soit μ et ν deux mesures sur $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ qui donnent chacune une masse finie aux compacts de $\mathbb{R}^d$. On suppose que pour toute fonction continue à support compact f, on a $\int_{\mathbb{R}^d} f\ d\mu = \int_{\mathbb{R}^d} f\ d\nu$. Alors $\mu = \nu$.*

Démonstration. Les compacts de $\mathbb{R}^d$ forment un π-système qui engendre la tribu borélienne de $\mathbb{R}^d$ (par exemple car les pavés ouverts s'écrivent comme réunion dénombrable de pavés compacts), donc il suffit de montrer que μ et ν coïncident sur les compacts. Soit f_n la fonction de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ définie par $f_n(x) = (1 - nx)^+$. f est continue, vaut 1 en 0 et est nulle sur $[1/n, +\infty[$. Soit K un compact de $\mathbb{R}^d$, et posons $g_n(x) = f_n(d(x, K))$, où $d(x, K) = \inf d(x, y);\ y \in K$. g_n est continue, comme composition d'application continues, et converge simplement vers l'indicatrice de K. Comme $|g_n| \le \mathbb{1}_{K+\overline{B}(0,1)}$ qui est intégrable par rapport à μ et ν, le théorème de convergence dominée dit que $\int_{\mathbb{R}^d} g_n\ d\mu$ converge vers $\int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_K\ d\mu = \mu(K)$ et $\int_{\mathbb{R}^d} g_n\ d\nu$ vers $\int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_K\ d\nu = \nu(K)$. Vu l'hypothèse faite, $\int_{\mathbb{R}^d} g_n\ d\mu = \int_{\mathbb{R}^d} g_n\ d\nu$ pour tout n, donc $\mu(K) = \nu(K)$. Comme μ et ν coïncident sur les compacts, on a donc bien $\mu = \nu$. □

4.7 Applications aux intégrales à paramètre

4.7.1 Continuité d'une intégrale dépendant d'un paramètre

Théorème 4.7.1. *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré. Soit $f(x,t)$ une fonction (à valeurs réelles) de deux variables définie sur $\Omega \times T$, où T est un espace métrique. On suppose que pour tout $t \in T$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est mesurable par rapport à $\mathcal{F}$. On suppose qu'il existe une fonction g intégrable par rapport à μ telle que pour tout $t \in T$:*

$$|f(x,t)| \leq g(x) \ \mu - p.p.$$

On suppose enfin que, pour μ-presque tout x, $t \mapsto f(x,t)$ est continue.
Alors

$$F(t) = \int_\Omega f(x,t) \ d\mu(x)$$

définit une fonction continue sur T.

Démonstration. Que F soit bien définie découle de l'inégalité $|f(x,t)| \leq g(x)$ et de l'intégrabilité de g. Soit $t \in T$. Comme T est un espace métrique, la continuité est caractérisée par le comportement des suites : pour montrer que F est continue en $t \in T$, il suffit de montrer que pour toute suite $(t_n)_{n\geq 1}$ d'éléments de T convergeant vers t, $F(t_n)$ tend vers $F(t)$. Pour cela, il suffit d'appliquer le théorème de convergence dominée à la suite (f_n) définie par $f_n(x) = f(x, t_n)$: pour μ-presque tout x, $f_n(x)$ converge vers $f(x,t)$ grâce à la continuité de $t \mapsto f(x,t)$ et on a la domination $|f_n| \leq g$. □

4.7.2 Dérivabilité d'une intégrale dépendant d'un paramètre

Théorème 4.7.2. *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré. Soit $f(x,t)$ une fonction de deux variables définie sur $\Omega \times T$, où T est un intervalle de $\mathbb{R}$. On suppose que pour tout $t \in T$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est mesurable par rapport à $\mathcal{F}$ et intégrable par rapport à μ. On suppose enfin que, pour μ-presque tout x, $t \mapsto f(x,t)$ est dérivable par rapport à t, et qu'il existe une fonction g intégrable par rapport à μ telle que pour tout $t \in T$:*

$$\left|\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\right| \leq g(x) \ \mu - p.p.$$

Alors

$$F(t) = \int_\Omega f(x,t) \ d\mu(x)$$

définit une fonction dérivable sur T, avec

$$F'(t) = \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial t}(x,t) \ d\mu(x).$$

Démonstration. Il s'agit de montrer que pour toute suite (t_n) de points de T tendant vers t,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{F(t_n)-F(t)}{t_n-t} = \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\ d\mu(x).$$

Posons $f_n(x) = \frac{f(x,t_n)-f(x,t)}{t_n-t}$.
La suite de fonctions mesurables $(f_n)_{n\geq 1}$ converge μ-presque partout vers $\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)$, ce qui assure la mesurabilité de $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)$. De plus, d'après l'inégalité des accroissements finis, on a $|f_n(x)| \leq g(x)$ $\mu-$presque partout. Ainsi, d'après le théorème de convergence dominée, $\int_\Omega f_n\ d\mu(x)$ converge vers $\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\ d\mu(x)$. Cependant $\int_\Omega f_n\ d\mu(x) = \frac{F(t_n)-F(t)}{t_n-t}$, ce qui donne donc le résultat voulu. □

Remarque (importante)**.** Lorsque l'on veut démontrer la continuité (ou la dérivabilité) de $F(t)$ définie comme précédemment sur un intervalle T non compact, il est rare que l'on trouve une fonction majorante g qui convienne pour TOUTES les valeurs de T. Cependant, comme la continuité (ou la dérivabilité) est une propriété locale, il suffit de montrer que pour tout $t \in T$, il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de t tel que l'on ait une majoration uniforme pour les $t \in \mathcal{V}$.

4.7.3 Exercice : la fonction Gamma

On note Γ la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par la relation

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}\ dt.$$

Pour n entier naturel non nul, on pose

$$H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

1. Vérifier que Γ est bien définie.
2. Démontrer que la fonction Γ est dérivable sur $]0,+\infty[$, avec

$$\forall x > 0 \quad \Gamma'(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}\log t\ dt.$$

3. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par $u_n = H_n - \log n$ admet une limite lorsque n tend vers l'infini. On notera γ cette limite, appelée constante d'Euler.
4. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, $H_n = \int_0^1 \frac{1-(1-v)^n}{v}\ dv$.

5. En déduire que, pour tout entier naturel $n \geq 1$,

$$\frac{H_{n+1}}{n+1} = -\int_0^1 (1-v)^n \log v \; dv.$$

6. Établir que pour tout $t \geq 0$, $1 - t \leq e^{-t}$.
7. On pose $I_n = \int_0^n (1 - \frac{t}{n})^n \log t \; dt$. Montrer que

$$\lim_{n \to +\infty} I_n = \int_0^{+\infty} e^{-t} \log t \; dt.$$

8. Montrer que $\gamma = -\Gamma'(1)$.
Indication : on pourra montrer que $I_n = \frac{n}{n+1}(\log n - H_{n+1})$.

Solution

1. La fonction $t \mapsto e^{-t}t^{x-1}$ est continue sur $]0,+\infty[$, donc localement intégrable sur $]0,+\infty[$. Reste à étudier l'intégrabilité en 0 et en l'infini. En 0, $e^{-t}t^{x-1} \sim t^{x-1}$, et comme $x-1 > -1$ et que t^{x-1} est de signe constant au voisinage de 0, l'intégrabilité en 0 découle du critère d'équivalence avec une intégrale "de type Riemann" classique. En l'infini, $e^{-t}t^{x-1} = o(e^{-t/2})$, ce qui donne la convergence en l'infini.
2. Soient a, b réels avec $0 < a < b < +\infty$. Pour tout $t > 0$, on a

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(e^{-t}t^{x-1}\right) = e^{-t}t^{x-1}\log t.$$

Comme pour tout $t > 0$ et tout $x \in]a,b[$, on a

$$\begin{aligned} |e^{-t}t^{x-1}\log t| &= (-\log t)e^{-t}t^{x-1} \; \mathbb{1}_{]0,1[}(t) + e^{-t}t^{x-1}\log t \; \mathbb{1}_{[1,+\infty[}(t) \\ &\leq (-\log t)e^{-t}t^{a-1} \; \mathbb{1}_{]0,1[}(t) + e^{-t}t^{b-1}\log t \; \mathbb{1}_{[1,+\infty[}(t), \end{aligned}$$

on pourra appliquer le théorème de dérivation sous le signe intégrale dès qu'il sera acquis que

$$t \mapsto (-\log t)e^{-t}t^{a-1} \; \mathbb{1}_{]0,1[}(t) + e^{-t}t^{b-1}\log t \; \mathbb{1}_{[1,+\infty[}(t)$$

est intégrable sur $]0,+\infty[$.
– Cette fonction est continue, donc localement intégrable.
– En 0, on a $\log t = o(t^{-a/2})$ et $e^{-t} \sim 1$, d'où la relation de comparaison $(-\log t)e^{-t}t^{a-1} = o(t^{a/2-1})$, ce qui donne l'intégrabilité en 0.
– En $+\infty$, comme $\log t = o(t)$, on a $e^{-t}t^{b-1}\log t = o(e^{-t}t^b)$, mais $t^b = o(e^{t/2})$, donc finalement $e^{-t}t^{b-1}\log t = o(e^{-t/2})$, ce qui donne l'intégrabilité en l'infini.

Ainsi, la fonction Γ est dérivable sur $]a,b[$, avec

$$\forall x \in]a,b[\quad \Gamma'(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} \log t \, d\lambda(t).$$

Comme la dérivabilité est une propriété locale et que tout point de $]0,+\infty[$ admet un voisinage de la forme $]a,b[$, avec a,b réels vérifiant $0 < a < b < +\infty$, le résultat s'ensuit.

3. On a le comportement suivant

$$\begin{aligned} |u_n - u_{n-1}| &= |(H_n - H_{n-1}) - (\log n - \log(n-1))| \\ &= \left|\frac{1}{n} + \log(1-1/n)\right| = \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right| = O\left(\frac{1}{n^2}\right). \end{aligned}$$

Ainsi la série de terme général $u_n - u_{n-1}$ converge, mais on a la relation télescopique $\sum_{k=2}^{n} (u_n - u_{n-1}) = u_n - u_1$, donc la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ converge.

4. Pour tout $v \in]0,1[$, on a en posant $u = 1-v$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1-(1-v)^n}{v} \, dv &= \int_0^1 \frac{1-u^n}{1-u} \, du = \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n-1} u^k \right) \, du \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^1 u^k \, du = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1} = H_n. \end{aligned}$$

5. On fait une intégration par parties : pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$\begin{aligned} &\int_\varepsilon^1 (1-v)^n \log v \, dv \\ =\ & [\frac{1-(1-v)^{n+1}}{n+1} \log v]_\varepsilon^1 - \frac{1}{n+1} \int_\varepsilon^1 \frac{1-(1-v)^{n+1}}{v} \, dv \\ =\ & -\frac{1-(1-\varepsilon)^{n+1}}{n+1} \log \varepsilon - \frac{1}{n+1} \int_\varepsilon^1 \frac{1-(1-v)^{n+1}}{v} \, dv \end{aligned}$$

Cependant, on a l'équivalent en 0 : $-\frac{1-(1-\varepsilon)^{n+1}}{n+1} \log \varepsilon \sim -\varepsilon \log \varepsilon$, d'où en faisant tendre ε vers 0 :

$$\int_0^1 (1-v)^n \log v \, dv = -\frac{1}{n+1} \int_1^1 \frac{1-(1-v)^{n+1}}{v} \, dv = -\frac{H_{n+1}}{n+1}$$

grâce à la question précédente.

6. La fonction $t \mapsto f(t) = 1 - e^{-t}$ a comme dérivée e^{-t} qui est majorée par 1 sur $\mathbb{R}_+$. D'après l'inégalité des acroissements finis, on a $f(t) - f(0) \leq t$, d'où l'inégalité voulue.

7. Posons, pour $t > 0$ et $n \geq 1$, $f_n(t) = (1 - \frac{t}{n})^n (\log t)\ \mathbb{1}_{[0,n]}(t)$. Comme f_n est de signe constant et continue par morceaux, on a
$$\int_{]0,+\infty[} f_n(x)\ d\lambda(x) = \int_{]0,n]} f_n(x)\ d\lambda(x) = \int_0^n f_n(t)\ dt = I_n.$$
Pour $n \geq t$, on a $f_n(t) = (1 - \frac{t}{n})^n \log t$.
Mais $(1 - \frac{t}{n})^n = \exp(\log(1 - \frac{t}{n})^n) = \exp(n \log(1 - t/n))$: lorsque n tend vers l'infini $\log(1 - t/n) \sim -t/n$, d'où $n \log(1 - t/n) \sim -t$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} n \log(1 - t/n) = -t$, d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} (1 - t/n)^n = e^{-t}$. Finalement, pour tout $t > 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(t) = e^{-t} \log t$.
On a pour t compris entre 0 et n
$$\left|\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \log t\right| \leq (e^{-t/n})^n |\log t| = |\log t| e^{-t},$$
d'où $|f_n(t)| \leq |\log t| e^{-t}$. La dernière inégalité est encore vérifiée pour $t > n$: les termes sont tous nuls. Ainsi, on a sur $]0, +\infty[$ l'inégalité $|f_n(t)| \leq |\log t| e^{-t}$. Comme, on l'a vu au 2, cette fonction est intégrable, on peut alors appliquer le théorème de convergence dominée et on a
$$\lim_{n\to+\infty} I_n = \int_0^{+\infty} e^{-t} \log t\ dt.$$
8. Un simple changement de variable affine donne
$$\begin{aligned}\int_0^n f_n(t)\ dt &= n \int_0^1 f_n(ny)\ dy = n \int_0^1 (1 - y)^n \log(ny)\ dy.\\ &= n \log n \int_0^1 (1 - y)^n\ dy + n \int_0^1 (1 - y)^n \log y\ dy.\\ &= \frac{n \log n}{n + 1} - n \frac{H_{n+1}}{n + 1},\end{aligned}$$
soit $I_n = \frac{n}{n+1}(\log n - H_{n+1}) = \frac{n}{n+1}(\log n - H_n - \frac{1}{n+1})$.
Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} (H_n - \log n) = \gamma$, cela nous donne $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = -\gamma$. Or, d'après la question précédente, $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = \int_0^{+\infty} e^{-t} \log t\ dt$, qui d'après la question 2, est égale à $\Gamma'(1)$. On obtient donc l'identité $\gamma = -\Gamma'(1)$.

4.7.4 Holomorphie d'une intégrale dépendant d'un paramètre

Cette sous-section peut être omise sans dommage par un lecteur non-familier de l'analyse complexe.

Théorème 4.7.3. *Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré et O un ouvert de $\mathbb{C}$. Soit $f(x, z)$ une fonction de deux variables définie sur $\Omega \times O$. On suppose que pour tout $z \in O$, la fonction $x \mapsto f(x, z)$ est mesurable par rapport à $\mathcal{F}$. On suppose que pour tout compact K inclus dans O, il existe une fonction g_K intégrable par rapport à μ telle que pour tout $z \in K$.*

$$|f(x, z)| \leq g_K(x) \ \mu - p.p.$$

On suppose enfin que, pour μ-presque tout x, $z \mapsto f(x, z)$ est holomorphe.

Alors $F(z) = \int_\Omega f(x, z)\, d\mu(x)$ définit une fonction holomorphe sur O avec

$$\forall n \geq 1 \quad F^{(n)}(z) = \int_\Omega \frac{\partial^n f}{\partial z^n}(x, z)\, d\mu(x).$$

Remarquons que le contrôle repose sur $f(x, z)$, et non pas sur sa dérivée. Si l'on laisse de côté l'argument standard de localisation, la preuve ressemble beaucoup à la preuve du théorème précédent, mais il y a un petit miracle lié à l'holomorphie : grâce aux inégalités de Cauchy, majorer localement $f(x, z)$ permet de majorer localement $\frac{\partial f}{\partial z}(x, z)$.

Démonstration. Commençons par un argument d'analyse complexe. Montrons que pour tout $n \geq 1$ et pour tout compact K inclus dans O, il existe une fonction $g_{n,K}$ intégrable par rapport à μ telle que

$$\forall z \in K \quad \left| \frac{\partial^n f}{\partial z^n}(x, z) \right| \leq g_{n,K}(x) \ \mu - p.p.$$

Vu ce résultat, il suffira alors de montrer la formule pour $n = 1$, le résultat général venant aisément par récurrence.

Soit K un compact, $n \geq 1$. Un raisonnement classique de compacité donne l'existence d'un $r > 0$ tel que $K + \overline{B}(0, r) \subset O$ (où $\overline{B}(0, r)$ est la boule fermée centrée en l'origine de rayon r). Notons que $K + \overline{B}(0, r) \subset O$ est également un compact. Pour tout z dans K, on a, pour μ-presque tout x, l'identité

$$\frac{\partial^n}{\partial z^n} f(x, z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C(z,r)} \frac{f(x, z')}{z'^{n+1}}\, dz' = \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(x, z + re^{i\theta}) e^{-in\theta}\, d\theta.$$

Ainsi $|\frac{\partial^n}{\partial^n z} f(x, z)| \leq \frac{1}{r^n} g_{K+B(0,r)}(x)$, ce qui donne le résultat voulu en prenant comme fonction majorante $g_{n,K} = r^{-n} g_{K+B(0,r)}$.

Passons maintenant à la preuve de l'identité et de la formule pour $n = 1$. Soit $z_0 \in O$. Prenons r tel que la boule fermée de centre z_0 et de rayon r soit incluse dans O. On prend $K = \overline{B}(z_0, r)$.
Posons $F_{\theta,x}(r) = f(x, z_0 + re^{i\theta})$. On a, pour μ-presque tout x, l'égalité (vectorielle)

$$F_{\theta,x}(r) - F_{\theta,x}(0) = \int_0^r F'_{\theta,x}(u)\, du,$$

soit
$$\frac{f(x,z_0+re^{i\theta})-f(x,z_0)}{re^{i\theta}}=\frac{1}{r}\int_0^r \frac{\partial}{\partial z}f(x,z_0+ue^{i\theta})\ du.$$
Ainsi pour tout z tel que $|z-z_0|\le r$, on a
$$\left|\frac{f(x,z)-f(x,z_0)}{z-z_0}\right|\le \sup_{z\in\overline{B}(z_0,r)}\left|\frac{\partial}{\partial z}f(x,z)\right|\le g_{1,B(z_0,r)}(x)\ \mu-\text{p.p.}$$
On conclut alors comme précédemment avec le théorème de convergence dominée et une suite (z_n) quelconque de limite z_0 (à partir d'un certain rang, elle prend ses valeurs dans K). On peut remarquer que la fin de la preuve est presque identique à la preuve du théorème de dérivation sous le signe intégrale, à la différence près qu'on a redémontré "à la main" l'inégalité des accroissements dans le cadre du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$. □

Exercice 1. Posons $\phi(z)=\int_{\mathbb{R}_+}\frac{e^{-x}}{x-z}\ d\lambda(x)$ et montrons que ϕ est holomorphe sur $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_+$. Soit K un compact de $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_+$: la fonction $z\mapsto d(z,\mathbb{R}_+)$ est continue sur K, donc y atteint son minimum, noté ε_K. Comme K ne rencontre pas $\mathbb{R}_+$, on a $\varepsilon_K>0$. On peut donc appliquer le théorème avec $g_K(x)=\frac{e^{-x}}{\varepsilon_K}$. Il s'agit en fait de la transformée de Stieljès de la fonction e^{-x}.

4.8 Mesures à densité

4.8.1 Définition et premières propriétés

Soit $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ un espace mesuré. Soit f une fonction positive mesurable de $(\Omega,\mathcal{F})$ dans $(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$. On peut définir une application ν de $(\Omega,\mathcal{F})$ dans $[0,+\infty]$ par
$$\nu(A)=\int_A f\ d\mu.$$
Il n'est pas difficile de démontrer que ν est une mesure sur $(\Omega,\mathcal{F})$ (exercice laissé au lecteur).

Définition. On dit que ν est une mesure qui admet une densité par rapport à μ et que cette densité est f.

En réalité, il y a ici un abus de langage : en effet, une même mesure ne peut-elle admettre plusieurs densités par rapport à μ ?

Proposition 4.8.1. *Soit ν une mesure σ-finie. Soient f et g deux fonctions mesurables étant toutes deux des densités de ν par rapport à μ. Alors $f=g$ μ-presque partout.*

Démonstration. Supposons d'abord μ finie. Posons $A_+ = \{\omega : f(\omega) > g(\omega)\}$. On a $0 = \nu(A_+) - \nu(A_+) = \int_{A_+} f\ d\mu - \int_{A_+} g\ d\mu = \int_{A_+} (f - g)\ d\mu$.
De même si l'on pose $A_- = \{\omega : f(\omega) < g(\omega)\}$, on a encore la relation $0 = \nu(A_-) - \nu(A_-) = \int_{A_-} f\ d\mu - \int_{A_-} g\ d\mu = \int_{A_-} (f - g)\ d\mu$. Cependant $|f - g| = (f - g)\mathbb{1}_{A_+} - (f - g)\mathbb{1}_{A_-}$, donc

$$\begin{aligned} \int |f-g|\ d\mu &= \int (f-g)\ \mathbb{1}_{A_+}\ d\mu - \int (f-g)\ \mathbb{1}_{A_-}\ d\mu \\ &= \int_{A_+} (f-g)\ d\mu - \int_{A_-} (f-g)\ d\mu = 0 - 0 = 0. \end{aligned}$$

Ce qui implique que $f = g$ μ-presque partout. Cas général : on pose $\nu_n(A) = \nu(A \cap \Omega_n)$, où (Ω_n) est une suite croissante d'ensembles de mesure finie de réunion Ω. ν_n est une mesure finie et admet les densités $f\mathbb{1}_{\Omega_n}$ et $g\mathbb{1}_{\Omega_n}$ qui coïncident donc μ-presque partout : on a $f\mathbb{1}_{\Omega_n} = g\mathbb{1}_{\Omega_n}$ μ-presque partout, et à la limite $f = g$ μ-p.p. □

Théorème 4.8.2. *On suppose que ν est une mesure admettant f comme densité par rapport à μ. Alors, pour toute fonction mesurable g*

$$\int |g|\ d\nu = \int |g| f\ d\mu. \tag{4.3}$$

Si cette quantité est finie, on a alors

$$\int g\ d\nu = \int g f\ d\mu. \tag{4.4}$$

Démonstration. Si $g = \mathbb{1}_A$ avec $A \in \mathcal{F}$, (4.4) est immédiat. Par linéarité, (4.4) est également vérifiée lorsque g est une fonction simple positive. En utilisant le lemme 4.3.3 et le théorème de convergence monotone, il s'ensuit que (4.4) est vraie pour toute fonction mesurable positive, donc en particulier (4.3) est vraie pour toute fonction mesurable g. Supposons maintenant que $\int |g|\ d\nu = \int |g| f\ d\mu < +\infty$: on peut alors écrire $g = g^+ - g^-$ avec $\int g^+\ d\nu < +\infty$ et $\int g^-\ d\nu < +\infty$. Comme g^+ et g^- sont des fonctions mesurables positives, on a $\int g^+\ d\nu = \int g^+ f\ d\mu$ et $\int g^-\ d\nu = \int g^- f\ d\mu$. En faisant la différence, on obtient donc $\int (g^+ - g^-)\ d\nu = \int (g^+ - g^-) f\ d\mu$, soit (4.4). □

4.8.2 Décomposition de Lebesgue

Définition. On dit que la mesure μ est une mesure absolument continue par rapport à λ, ce qui est noté $\mu \ll \lambda$, si pour tout borélien $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, on a : $\lambda(A) = 0$ implique $\mu(A) = 0$. On dit que la mesure ν est une mesure singulière par rapport à λ, ce que l'on note $\nu \perp \lambda$, s'il existe $N \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ tel que $\lambda(N) = 0$ et $\nu(N^c) = 0$.

Remarque. Un tel borélien N n'est pas nécessairement unique.

Théorème 4.8.3. *Toute mesure $\sigma-$finie μ sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ se décompose de façon unique sous la forme $\mu = \nu_1 + \nu_2$, où ν_1 est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue λ et ν_2 est singulière par rapport à λ.*

Démonstration. Montrons tout d'abord l'existence d'une telle décomposition. Considérons l'ensemble des négligeables pour la mesure λ :

$$\mathcal{N} = \{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R});\ \lambda(A) = 0\}.$$

Posons $\alpha = \sup\{\mu(A);\ A \in \mathcal{N}\}$. Si $\alpha = 0$, alors $\mu = \nu_1$ et il n'y a rien à démontrer. Supposons donc $\alpha > 0$. Dans ce cas, il existe une suite croissante (A_n) d'éléments de $\mathcal{N}$ telle que $\mu(A_n) \geq \alpha - \frac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Ainsi, l'ensemble $A = \cup_{n\geq 1} A_n \in \mathcal{N}$ vérifie $\mu(A) = \alpha$. Soit maintenant $B \subset A^c$ tel que $\lambda(B) = 0$. On se demande s'il est possible d'avoir $\mu(B) > 0$. On sait que $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) \geq \alpha$ et $A \cup B \in \mathcal{N}$ donc $\mu(A \cup B) \leq \alpha$. On voit donc que nécessairement $\mu(B) = 0$. Posons maintenant $\nu_1 = \mathbb{1}_{A^c}\mu$ et $\nu_2 = \mathbb{1}_A \mu$. La mesure ν_1 admet la densité $\mathbb{1}_{A^c}$ par rapport à μ. On a

$$\nu_1(B) = \int_B \mathbb{1}_{A^c}\, d\mu = \int \mathbb{1}_{A^c}\mathbb{1}_B\, d\mu = \int \mathbb{1}_{A^c\cap B}\, d\mu = \mu(A^c \cap B).$$

Ainsi, si B est tel que $\lambda(B) = 0$, alors $\nu_1(B) = \mu(A^c \cap B) = 0$ et donc $\nu_1 \ll \lambda$. On remarque de plus que $\lambda(A^c) = 0$ et $\nu_2(A^c) = \mu(A \cap A^c) = 0$. Donc ν_2 est bien singulière par rapport à λ.

Pour montrer l'unicité de la décomposition, supposons que $\mu = \nu_1' + \nu_2'$, avec $\nu_1' \ll \lambda$ et $\nu_2' \perp \lambda$. Choisissons donc des ensembles $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ tels que $\nu_2(A) = \mu(A^c) = \nu_2(B) = \mu(B^c) = 0$. On a alors

$$\nu_2(A \cap B) = \nu_2'(A \cap B) = \nu_1(A^c \cup B^c) = \nu_1'(A^c \cup B^c) = 0.$$

Donc $\nu_1 = \mathbb{1}_{A\cap B}\ \nu_1 = \mathbb{1}_{A\cap B}\ \mu = \mathbb{1}_{A\cap B}\ \nu_1' = \nu_1'$ et $\nu_2 = \mu - \nu_1 = \mu - \nu_1' = \nu_2'$. □

Remarque. En réalité, on peut dire un peu plus : la mesure ν_1 apparaissant dans la décomposition du théorème admet une densité par rapport à la mesure de Lebesgue. Ce résultat constitue le théorème de Radon-Nikodým. Ce résultat, que nous ne démontrerons pas ici, peut être établi à l'aide de techniques hilbertiennes (voir par exemple Rudin [28]).

4.9 Intégration par rapport à une mesure image : le théorème de transfert

Le théorème qui suit est un résultat très utile, dont la portée n'est malheureusement pas toujours bien comprise. Dans un certain sens, on peut considérer que c'est ce théorème qui légitime l'introduction du concept de mesure image, puisqu'il exprime que dès lors qu'on sait décrire la mesure image μ_T, on saura calculer les intégrales de fonctions de la forme $f \circ T$. C'est en probabilités que son intérêt est le plus évident ; sa maîtrise est un objectif important d'un cours de probabilités de ce niveau. En analyse, ce théorème permet de calculer certaines intégrales avec une redoutable efficacité, voir par exemple la preuve du calcul du volume de la boule unité que nous proposons en fin de ce chapitre.

Théorème 4.9.1. *Soient* $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ *un espace mesuré,* T *une application mesurable de* $(\Omega, \mathcal{F})$ *dans* $(\Omega', \mathcal{F}')$*. Soit* f *une application mesurable de* $(\Omega', \mathcal{F}')$ *dans* $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$*. Alors* f *est intégrable par rapport à* μ_T *si et seulement si* $f \circ T$ *est intégrable par rapport à* μ*. Dans ce cas, on a*

$$\int_{\Omega'} f(y)\ d\mu_T(y) = \int_{\Omega} (f \circ T)(x)\ d\mu(x). \tag{4.5}$$

Démonstration. Prenons d'abord le cas où f est l'indicatrice d'un ensemble $A \in \mathcal{F}'$: on a $\int_{\Omega'} f\ d\mu_T = \int_{\Omega'} \mathbb{1}_A\ d\mu_T = \mu_T(A) = \mu(T^{-1}(A))$. D'autre part $\mathbb{1}_A \circ T = \mathbb{1}_{T^{-1}(A)}$, donc $\int_{\Omega} f \circ T\ d\mu = \int_{\Omega} \mathbb{1}_{T^{-1}(A)}\ d\mu = \mu(T^{-1}(A))$. L'égalité (4.5) est donc vérifiée dans le cas où f est l'indicatrice d'un ensemble $A \in \mathcal{F}'$. Par linéarité, elle est donc vérifiée pour toute fonction étagée mesurable.

Soit maintenant f une application mesurable positive de $(\Omega', \mathcal{F}')$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Il existe une suite croissante d'applications étagées (f_n) convergeant ponctuellement vers f. Pour tout n, on a

$$\int_{\Omega'} f_n(y)\ d\mu_T(y) = \int_{\Omega} (f_n \circ T)(x)\ d\mu(x).$$

En appliquant le théorème de convergence monotone, on obtient à la limite $\int_{\Omega'} f(y)\ d\mu_T(y) = \int_{\Omega} (f \circ T)(x)\ d\mu(x)$. En particulier, pour toute application f mesurable de $(\Omega', \mathcal{F}')$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, on a $\int_{\Omega'} |f|\ d\mu_T = \int_{\Omega} |f| \circ T\ d\mu$, ce qui montre bien que f est intégrable par rapport à μ_T si et seulement si $f \circ T$ est intégrable par rapport à μ. Dans ce cas, f^+ et f^- sont intégrables, positives, et en soustrayant l'identité $\int_{\Omega'} f^-(y)\ d\mu_T(y) = \int_{\Omega} f^- \circ T(x)\ d\mu(x)$ de l'identité $\int_{\Omega'} f^+(y)\ d\mu_T(y) = \int_{\Omega} f^+ \circ T(x)\ d\mu(x)$, on obtient le résultat voulu. □

4.10 Mesure produit

L'introduction de la notion de mesure produit vise plusieurs buts :

- donner un sens mathématique à la notion intuitive d'aire dans $\mathbb{R}^2$, ou de volume dans $\mathbb{R}^3$,
- permettre le calcul d'intégrales de plusieurs variables,
- introduire un cadre mathématique qui permettra, dans un contexte probabiliste, de manier efficacement la notion d'indépendance.

On suppose que $(X, \mathcal{X}, \mu)$ et $(Y, \mathcal{Y}, \nu)$ sont des espaces mesurés. On rappelle que $\mathcal{X} \otimes \mathcal{Y}$ est la tribu engendrée par les ensembles de type $X \times Y$, où (X, Y) décrit $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$.

4.10.1 Construction de la mesure produit

Lemme 4.10.1. *Pour tout $A \in \mathcal{X} \otimes \mathcal{Y}$, $x \in X$ et $y \in Y$, on note*

$$A_x = \{y \in Y : (x, y) \in A\} \quad et \quad A^y = \{x \in X : (x, y) \in A\}.$$

Alors $A_x \in \mathcal{Y}$ et $A^y \in \mathcal{X}$. De plus, si f est une fonction mesurable de $(X \times Y, \mathcal{X} \otimes \mathcal{Y})$ vers $(C, \mathcal{C})$, alors pour chaque x fixé, la fonction $y \mapsto f(x, y)$ est mesurable par rapport à la tribu $\mathcal{Y}$, et de même pour chaque y fixé la fonction $x \mapsto f(x, y)$ est mesurable par rapport à la tribu $\mathcal{X}$.

Démonstration. On va commencer par montrer la deuxième assertion. Fixons $x \in X$ et montrons que $f_x^1 : y \mapsto f(x, y)$ est $(Y, \mathcal{Y}) - (C, \mathcal{C})$ mesurable. Notons $\pi_x^1 : Y \to X \times Y$ qui à y associe (x, y). π_x^1 est $(Y, \mathcal{Y}) - (X \times Y, \mathcal{X} \times \mathcal{Y})$ mesurable car chacune des composantes est mesurable. Maintenant, l'identité $f_x^1 = f \circ \pi_x^1$ donne la mesurabilité voulue, par composition d'applications mesurables.

Revenons à la première proposition. La section verticale de niveau x : $A_x = \{y \in Y : (x, y) \in A\}$ peut s'écrire comme une image réciproque puisque $A_x = (f_x^1)^{-1}(\{1\})$, avec $f_x^1(y) = \mathbb{1}_A(x, y)$. Or l'application de $X \times Y$ dans $\mathbb{R}$ qui à (x, y) associe $\mathbb{1}_A(x, y)$ est $(X \times Y, \mathcal{X} \times \mathcal{Y}) - (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mesurable ; comme d'après ce qui précède, f_x^1 est $(Y, \mathcal{Y}) - (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mesurable, on a donc $A_x \in \mathcal{Y}$.

On traite de la même manière A^y et $f_y^2 : x \mapsto f(x, y)$. □

Remarque. On dit parfois que A^y et A_x sont des sections de l'ensemble A.

Théorème 4.10.2. *Soient $(X, \mathcal{X}, \mu)$ et $(Y, \mathcal{Y}, \nu)$ deux espaces mesurés dont les mesures μ et ν sont σ-finies. Alors, il existe une unique mesure m sur $(X \times Y, \mathcal{X} \otimes \mathcal{Y})$ telle que pour tous $X \in \mathcal{X}$ et $Y \in \mathcal{Y}$, on ait*

$$m(X \times Y) = \mu(X)\nu(Y).$$

On notera dans la suite $\mu \otimes \nu$ cette mesure. De plus, pour tout $E \in X \otimes Y$, les fonctions $x \mapsto \nu(E_x)$ et $y \mapsto \mu(E^y)$ sont mesurables et l'on a

$$\int_X \nu(E_x)\ d\mu(x) = \int_Y \mu(E^y)\ d\nu(y) = (\mu \otimes \nu)(E).$$

Démonstration. Supposons d'abord que μ et ν sont finies. Soit E dans $\mathcal{X} \otimes \mathcal{Y}$; d'après le lemme précédent la fonction $x \mapsto \nu(E_x)$ est bien définie. Notons $\mathcal{T}'$ la famille des ensembles $E \in \mathcal{X} \otimes \mathcal{Y}$ tels que cette fonction soit mesurable de $\mathcal{X}$ dans $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Il n'est pas difficile de voir que $\mathcal{T}'$ est un λ-système (voir la dernière section du chapitre 3). Mais $\mathcal{T}'$ contient tous les pavés (les éléments de $\mathcal{X}\times\mathcal{Y}$). En effet, prenons $E = A\times B$, avec $A \in \mathcal{X}$ et $B \in \mathcal{Y}$: on a $E_x = \{y \in B(x,y) \in A \times B\}$. Ainsi $E_x = B$ si $x \in A$ et $\varnothing$ sinon, et donc $\nu(E_x) = \nu(B)$ si $x \in A$ et 0 sinon. Ainsi, $\nu(E_x) = \nu(B)\mathbb{1}_A(x)$, et $x \mapsto \nu(B)\mathbb{1}_A(x)$ est bien une fonction mesurable de $\mathcal{X}$ dans $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. $\mathcal{T}'$ est donc un λ-système contenant un π-système qui engendre $\mathcal{X}\otimes\mathcal{Y}$. Ainsi, d'après le théorème λ-π, $\mathcal{T}'$ est $\mathcal{X}\otimes\mathcal{Y}$ tout entier. Finalement, pour tout E dans $\mathcal{X}\otimes\mathcal{Y}$, on peut définir

$$m_1(E) = \int_X \nu(E_x)\ d\mu(x);$$

et de même on pourrait définir

$$m_2(E) = \int_Y \mu(E^y)\ d\nu(y).$$

Prenons à nouveau $E = A \times B$ et $E_x = \{y \in B(x,y) \in A \times B\}$. Ainsi $E_x = B$ si $x \in A$ et $\varnothing$ sinon, et donc $\nu(E_x) = \nu(B)$ si $x \in A$ et 0 sinon. Ainsi $m_1(E) = \int_X \mathbb{1}_A\nu(B)\ d\mu = \mu(A)\nu(B)$. En procédant de la même manière, on obtient $m_2(E) = \int_Y \mathbb{1}_B\mu(A)\ d\nu = \mu(A)\nu(B)$. Donc m_1 et m_2 sont des mesures finies qui coïncident sur les pavés : elles sont donc égales.

Passons maintenant au cas où μ et ν sont σ-finies : on peut partitionner X (et Y) en une famille dénombrable d'ensembles de mesure finie : $X = \bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i$ et $Y = \bigcup_{j=1}^{+\infty} B_j$. Notons $m^{i,j}$ la mesure associée comme précédemment aux mesures traces $\nu_{|A_i}$ et $\mu_{|B_j}$. En d'autres termes

$$m^{i,j}(E) = \int_X \nu_{|A_i}(E_x)\ d\mu_{|B_j}(x) = \int_Y \mu_{|B_j}(E^y)\ d\nu_{|A_i}(x).$$

Alors, il n'est pas difficile de voir que la mesure m s'écrit $m = \sum_i \sum_j m^{i,j}$. On a alors

$$\begin{aligned}
m(A\times B) &= \sum_i \sum_j m^{i,j}((A\times B)\cap(A_i\times B_j)) \\
&= \sum_i \sum_j m^{i,j}((A\cap A_i)\times(B\cap B_j)) \\
&= \sum_i \sum_j \mu(A\cap A_i)\nu(B\cap B_j) \\
&= \left(\sum_i \mu(A\cap A_i)\right)\left(\sum_j \mu(B\cap B_j)\right) = \mu(A)\nu(B).
\end{aligned}$$

□

Remarque. Il n'est pas difficile de voir que si μ, ν sont des mesures σ-finies, a et b des réels, alors $(a\mu) \otimes (b\nu) = (ab)(\mu \otimes \nu)$ (utiliser la partie unicité du théorème).

Exercice 2. Soient $(X, \mathcal{X}, \mu)$ un espace mesuré où μ est σ-finie, f une application mesurable de $(X, \mathcal{X})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. On note T l'application de $X \times \mathbb{R}$ dans lui-même qui à (x, y) associe $(x, y + f(x))$. Alors, T est une application mesurable qui laisse invariante la mesure $\mu \otimes \lambda$.

En effet, T est mesurable car ses composantes sont mesurables. Notons $m = \mu \otimes \lambda$. Il suffit de montrer que pour tout $A \in \mathcal{X}$ et tout borélien B de $\mathbb{R}$, l'ensemble $E = A \times B$ vérifie $m(E) = m(T^{-1}(E))$. On a

$$m(E) = \int_X \lambda(E_x)\, d\mu(x) \quad \text{et} \quad m(T^{-1}E) = \int_X \lambda((T^{-1}(E))_x)\, d\mu(x).$$

Comme on l'a déjà vu, $E_x = B$ si $x \in A$, tandis que $E_x = \varnothing$ si $x \notin A$. Ainsi, on a $\lambda(E_x) = \lambda(B)\, \mathbb{1}_A(x)$. Par ailleurs,

$$(T^{-1}(E))_x = \{y \in \mathbb{R}; (x, y) \in T^{-1}(E)\} = \{y \in \mathbb{R}; (x, y + f(x)) \in E\},$$

qui est donc égal à $B - f(x)$ si $x \in A$, zéro sinon. Ainsi,

$$\lambda((T^{-1}(E))_x) = \lambda(B - f(x))\, \mathbb{1}_A(x).$$

Mais on sait que la mesure de Lebesgue est invariante par translation : $\lambda(B - f(x)) = \lambda(B)$. Il n'y a plus qu'à intégrer pour obtenir l'égalité voulue.

4.10.2 Théorèmes de Fubini et Tonelli

La partie qui précède aura peut-être semblé un peu fastidieuse au lecteur. Mais maintenant le plus dur est fait, et nous allons voir comment, avec les théorèmes de Fubini et Tonelli, on peut concrètement calculer des intégrales de fonctions de plusieurs variables. Tous les résultats suivant se montrent toujours en trois étapes. On commence par les prouver pour une fonction indicatrice quelconque, puis pour une fonction simple quelconque et on conclut par un argument d'approximation par des fonctions simples (énoncé dans le lemme 4.3.3).

Théorème 4.10.3 (Tonelli). *Soient $(X, \mathcal{X}, \mu)$ et $(Y, \mathcal{Y}, \nu)$ deux espaces mesurés dont les mesures μ et ν sont σ-finies et $f \in \mathcal{V}_+(X \times Y, \mathcal{X} \otimes \mathcal{Y})$. f est donc une fonction positive.*

Pour tout $x \in X$, la fonction $y \mapsto f(x, y)$ est mesurable de $(Y, \mathcal{Y})$ dans $(\overline{\mathbb{R}}_+, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+))$ et la fonction

$$x \mapsto \int_Y f(x, y)\, d\nu(y)$$

est dans $\overline{\mathcal{V}}_+(X, \mathcal{X})$.
De même pour tout $y \in Y$, *la fonction* $x \mapsto f(x, y)$ *est mesurable de* $(X, \mathcal{X})$ *dans* $(\overline{\mathbb{R}}_+, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+))$ *et*

$$y \mapsto \int_X f(x,y)\ d\mu(x)$$

est dans $\overline{\mathcal{V}}_+(Y, \mathcal{Y})$.

Enfin, on a les égalités

$$\begin{aligned}\int_{X\times Y} f\ d(\mu\otimes\nu) &= \int_X \left(\int_Y f(x,y)\ d\nu(y)\right)\ d\mu(x)\\ &= \int_Y \left(\int_X f(x,y)\ d\mu(x)\right)\ d\nu(y).\end{aligned}$$

Démonstration. La mesurabilité de $y \mapsto f(x, y)$ est une conséquence immédiate du lemme 4.10.1.

Supposons que f s'écrive comme l'indicatrice d'un ensemble $A \in \mathcal{X} \otimes \mathcal{Y}$: on a alors

$$\int_Y f(x,y)\ d\nu(y) = \nu(A_x).$$

D'après la deuxième partie du Théorème 4.10.2, l'application $x \mapsto \int_Y f(x, y)\ d\nu(y)$ est donc mesurable et l'on a

$$\int_X \int_Y f(x,y)\ d\nu(y)\ d\mu(x) = \int_X \nu(A_x)\ d\mu(x) = \mu\otimes\nu(A) = \int_{X\times Y} f\ d\mu\otimes\nu.$$

Le résultat s'étend aisément à la classe des fonctions simples par linéarité, puis à $f \in \mathcal{V}_+(X \times Y, \mathcal{X} \otimes \mathcal{Y})$ en utilisant le lemme 4.3.3 et le théorème de convergence monotone. □

Théorème 4.10.4 (Fubini)**.** *Soient* $(X, \mathcal{X}, \mu)$ *et* $(Y, \mathcal{Y}, \nu)$ *deux espaces mesurés dont les mesures* μ *et* ν *sont* σ*-finies et* $f \in \mathcal{V}(\mathcal{X} \times \mathcal{Y}, \mathcal{X} \otimes \mathcal{Y})$. *On suppose que*

$$\int_{X\times Y} |f|\ d(\mu\otimes\nu) < +\infty.$$

Alors, il existe $X' \in \mathcal{X}$ *et* $Y' \in \mathcal{Y}$ *avec* $\mu(X\backslash X') = \nu(Y\backslash Y') = 0$ *et*

$$\begin{aligned}\int_{X\times Y} f\ d(\mu\otimes\nu) &= \int_{X'} \left(\int_Y f(x,y)\ d\nu(y)\right)\ d\mu(x)\\ &= \int_{Y'} \left(\int_X f(x,y)\ d\mu(x)\right)\ d\nu(y).\end{aligned}$$

Démonstration. On va juste montrer la première égalité. D'après le théorème de Tonelli,

$$\int_X \left(\int_Y |f(x,y)|\ d\nu(y)\right)\ d\mu(x) = \int_{X\times Y} |f|\ d(\mu\otimes\nu) < +\infty.$$

Il s'ensuit que si l'on pose

$$X' = \{x \in X; \int_Y |f(x,y)| \, d\nu(y) < +\infty\},$$

on a $\mu(X \backslash X') = 0$.
Par suite $\mu \otimes \nu(X \times Y \backslash X' \times Y) = \mu(X \backslash X')\nu(Y) = 0$. (On rappelle que dans $\overline{\mathbb{R}}_+$, $0.\infty = 0$.)
Ainsi, comme l'hypothèse $\int_{X\times Y} |f| \; d(\mu \otimes \nu) < +\infty$ entraîne l'existence de $\int_{X\times Y} f \; d(\mu\otimes\nu)$, on peut écrire

$$\begin{aligned}
& \int_{X\times Y} f \; d(\mu\otimes\nu) \\
= & \int_{X'\times Y} f \; d(\mu\otimes\nu) \\
= & \int_{X'\times Y} (f^+ - f^-) \; d(\mu\otimes\nu) \\
= & \int_{X'\times Y} f^+ \; d(\mu\otimes\nu) - \int_{X'\times Y} f^- \; d(\mu\otimes\nu) \\
= & \int_{X'} \left(\int_Y f^+(x,y) \; d\nu(y)\right) \; d\mu(x) - \int_{X'} \left(\int_Y f^-(x,y) \; d\nu(y)\right) \; d\mu(x) \\
= & \int_{X'} \left(\int_Y f^+(x,y) \; d\nu(y)\right) - \left(\int_Y f^-(x,y) \; d\nu(y)\right) \; d\mu(x) \\
= & \int_{X'} \left(\int_Y f(x,y) \; d\nu(y)\right) \; d\mu(x).
\end{aligned}$$

□

Les théorèmes de Tonelli et Fubini sont intimement liés : très souvent, on utilise d'abord le théorème de Tonelli afin de pouvoir appliquer le théorème de Fubini.

Exercice 3. Pour $x > 0$, on pose $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{(\cos t)(1-\cos t)}{t} e^{-xt} \; dt$. Montrer que F est intégrable sur $]0, +\infty[$ et que

$$\int_{]0,+\infty[} F(x) \; d\lambda(x) = \int_{]0,+\infty[} \frac{(\cos t)(1-\cos t)}{t^2} \; d\lambda(t).$$

Posons $f(x,t) = \frac{(\cos t)(1-\cos t)}{t} e^{-xt}$. On a $|f(x,t)| \leq \frac{1-\cos t}{t} e^{-xt}$, d'où pour tout $t > 0$,

$$\int_{]0,+\infty[} |f(x,t)| \; d\lambda(x) \leq \int_{]0,+\infty[} \frac{1-\cos t}{t} e^{-xt} \; d\lambda(x) = \frac{1-\cos t}{t^2}.$$

La fonction $t \mapsto \frac{1-\cos t}{t^2}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$: en effet, elle est continue, admet une limite $1/2$ en 0 et est en $O(1/t^2)$ en l'infini. D'après le théorème de Tonelli, f (ou $|f|$) est intégrable sur $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$. D'après Tonelli, $x \mapsto \int_{]0,+\infty[} |f(x,t)|\, d\lambda(t)$ est intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue sur $]0,+\infty[$. Comme $F(x) \le \int_{]0,+\infty[} |f(x,t)|\, d\lambda(x)$, F l'est aussi. Comme f est intégrable sur $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$, le théorème de Fubini nous dit que son intégrale est égale à $\int_{]0,+\infty[} F(x)\, d\lambda(x)$ d'une part (intégration en t puis en x), et à

$$\int_{]0,+\infty[} \left(\int_{]0,+\infty[} f(x,t)\, d\lambda(x) \right) d\lambda(t)$$

d'autre part (intégration en x puis en t), soit $\int_{]0,+\infty[} \frac{(\cos t)(1-\cos t)}{t^2}\, d\lambda(t)$.

4.10.3 Associativité de la mesure produit

Soient $(X,\mathcal{X},\mu),(Y,\mathcal{Y},\nu),(Z,\mathcal{Z},\gamma)$ trois espaces mesurés σ-finis. Comme précédemment, on note $\mathcal{X}\otimes\mathcal{Y}\otimes\mathcal{Z}$ la tribu engendrée par les ensembles de la forme $A\times B\times C$, où (A,B,C) décrit $\mathcal{X}\times\mathcal{Y}\times\mathcal{Z}$.

On note ϕ l'application de $(X\times Y)\times Z \to X\times Y\times Z : ((x,y),z)\mapsto(x,y,z)$ et ψ l'application de $X\times(Y\times Z)\to X\times Y\times Z : (x,(y,z))\mapsto(x,y,z)$. Alors la mesure image m_1 de $(\mu\otimes\nu)\otimes\gamma$ par ϕ et la mesure image m_2 de $\mu\otimes(\nu\otimes\gamma)$ par ψ sont égales : on note simplement cette mesure $\mu\otimes\nu\otimes\gamma$.

Montrons que m_1 et m_2 sont égales. On a :

$$\begin{aligned} m_1(A\times B\times C) &= (\mu\otimes\nu)\otimes\gamma(\phi^{-1}(A\times B\times C)) \\ &= (\mu\otimes\nu)\otimes\gamma((A\times B)\times C) \\ &= \mu\otimes\nu(A\times B)\gamma(C) = \mu(A)\nu(B)\gamma(C) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} m_2(A\times B\times C) &= \mu\otimes(\nu\otimes\gamma)(\psi^{-1}(A\times B\times C)) \\ &= \mu\otimes(\nu\otimes\gamma)(A\times(B\times C)) \\ &= \mu(A)(\nu\otimes\gamma)(B\times C) = \mu(A)\nu(B)\gamma(C), \end{aligned}$$

ce qui montre que les mesures coïncident.

4.10.4 Convolution de mesures

Définition. Soient μ et ν deux mesures σ-finies sur $(\mathbb{R}^d,\mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$. On appelle convolée de μ et ν et on note $\mu*\nu$ la mesure image de $\mu\otimes\nu$ par l'application $(x,y)\mapsto x+y$.

Proposition 4.10.5. *Si μ, ν sont des mesures σ-finies, a et b des réels, alors*

- $(a\mu)*(b\nu) = (ab)(\mu*\nu)$.
- $\mu*0 = 0*\mu = 0$, *où* 0 *désigne la mesure nulle.*

Démonstration. Soit $f : (x, y) \mapsto x + y$. On a

$$\begin{aligned} (a\mu) * (b\nu)(A) &= ((a\mu) \otimes (b\nu))(f^{-1}(A)) \\ &= ab(\mu \otimes \nu)(f^{-1}(A)) = ab(\mu * \nu)(A). \end{aligned}$$

De plus, on a $\mu * 0(A) = (\mu \otimes 0)(f^{-1}(A)) = 0$, et de même $0 * \mu(A) = (0 \otimes \mu)(f^{-1}(A)) = 0$. □

4.11 Les théorèmes généraux et la mesure de comptage

Un certain nombre de théorèmes généraux donnent des résultats très pratiques lorsqu'ils sont utilisés avec la mesure de comptage. On va juste en énoncer deux, mais le lecteur aura intérêt à relire chaque théorème en se demandant quel résultat on obtient lorsqu'on prend pour une (ou toutes les) mesure(s) en jeu la mesure de comptage. Bien sûr, il retrouvera parfois des résultats connus.

Théorème 4.11.1 (Série à paramètre)**.** *Soit une famille de nombres réels $a(k, n)$ pour $k \geq 1, n \geq 1$ entiers. On suppose qu'il existe une suite de nombres réels positifs $(c_k)_{k \geq 1}$ avec les propriétés :*

$$\forall (n, k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \quad |a(k, n)| \leq c_k, \qquad \sum_{k=1}^{+\infty} c_k < +\infty.$$

On suppose que pour tout $k \geq 1$, la limite suivante existe :

$$\lim_{n \to +\infty} a(k, n) := a(k, \infty).$$

Alors les deux séries $s_n = \sum_{k=1}^{+\infty} a(k, n)$ et $s = \sum_{k=1}^{+\infty} a(k, \infty)$ convergent absolument et on a de plus $\lim_{n \to +\infty} s_n = s$, soit

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} a(k, n) = \sum_{k=1}^{+\infty} a(k, \infty).$$

Démonstration. Ici, il s'agit d'appliquer le théorème de convergence dominée à la mesure de comptage. □

Démontrer le théorème 4.11.1 par des moyens élémentaires (avec des ε) est également un exercice très instructif que nous vous conseillons vivement.

Théorème 4.11.2. *Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré et $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite de fonctions mesurables positives de $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ dans $(\overline{\mathbb{R}}_+, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+))$. On pose $f = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$. Alors*

$$\int_\Omega f \; d\mu = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_\Omega f_n \; d\mu.$$

Les deux quantités peuvent valoir $+\infty$.

Démonstration. On peut, au choix, appliquer le théorème de Tonelli à la fonction $f(n,x) = f_n(x)$ que l'on en intègre sur $\mathbb{N}^* \times \Omega$, ou encore appliquer le théorème de convergence monotone aux sommes partielles. □

Remarque. Série de fonctions
Voici une conséquence de ce théorème. Si la série de terme général $\int_\Omega f_n \; d\mu$ converge, alors f est intégrable. En particulier $f(\omega)$ est fini pour μ-presque tout ω. Nous en déduisons que, pour une suite (f_n) de fonctions mesurables de signe quelconque, si la série de terme général $\int_\Omega |f_n| \; d\mu$ converge, alors la série de terme général $f_n(\omega)$ converge (absolument) pour μ-presque tout ω.

4.12 La mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$

Définition. On appelle mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$ la mesure $\lambda^{\otimes d}$. On la note parfois λ^d, parfois même λ lorsqu'il n'y a pas de confusion possible (mais ce n'est pas une très bonne idée quand on débute).

4.12.1 Transformations affines

Théorème 4.12.1. *Soit $y \in \mathbb{R}^d$. La translation $x \mapsto x + y$ laisse invariante la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$.*

Démonstration. Il suffit de vérifier l'invariance pour un pavé, ce qui est immédiat. □

L'invariance de la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$ par les translations en fait une mesure très particulière. Plus précisément, on a le résultat suivant :

Théorème 4.12.2. *Soit m une mesure sur $\mathbb{R}^d$ invariante par les translations et telle que $m(B(0,1)) < +\infty$. Alors $m = \frac{m(B(0,1))}{\lambda(B(0,1))}\lambda$.*

Démonstration. $\mathbb{R}^d$ est réunion dénombrable de translatés de la boule unité, donc m est σ-finie, ce qui permet d'appliquer Tonelli. Si $m(B(0,1)) = 0$, $m(\mathbb{R}^d) = 0$ et il n'y a rien à démontrer. Sinon, posons $g = \frac{1}{m(B(0,1))}\mathbb{1}_{B(0,1)}$. Par construction, on a $\int_{\mathbb{R}^d} g \; dm = 1$. On pose $\alpha = \int_{\mathbb{R}^d} g(-x) \; d\lambda(x) = \frac{\lambda(B(0,1))}{m(B(0,1))}$.

Soit f une fonction mesurable positive. On a, en appliquant plusieurs fois les invariances de λ et de m ainsi que le théorème de Tonelli :

$$\begin{aligned}
\int f\ d\lambda &= \left(\int f\ d\lambda\right)\left(\int g\ dm\right)\\
&= \int g(y)\left(\int f(x)\ d\lambda(x)\right)\ dm(y)\\
&= \int g(y)\left(\int f(x+y)\ d\lambda(x)\right)\ dm(y)\\
&= \int\left(\int g(y)f(x+y)\ d\lambda(x)\right)\ dm(y)\\
&= \int\left(\int g(y)f(x+y)\ dm(y)\right)\ d\lambda(x)\\
&= \int\left(\int g(y-x)f(y)\ dm(y)\right)\ d\lambda(x)\\
&= \int\left(\int g(y-x)\ d\lambda(x)\right) f(y)\ dm(y)\\
&= \int \alpha f(y)\ dm(y).
\end{aligned}$$

Reste à trouver la valeur de α. En prenant $f = \mathbb{1}_A$, on obtient $\lambda(A) = \alpha m(A)$, ce qui est le résultat voulu. □

Revenons aux propriétés d'invariance de la mesure de Lebesgue.

Théorème 4.12.3. *Soit $M \in SL_d(\mathbb{R})$ (c'est-à-dire que $\det M = 1$). L'application $x \mapsto Mx$ laisse invariante la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$.*

Démonstration. Un théorème d'algèbre linéaire dit que tout élément de $SL_d(\mathbb{R})$ peut s'écrire comme produit de matrices de transvections, c'est-à-dire de matrices de la forme $I_n + \alpha E_{ij}$ avec $i \neq j$, où E_{ij} est la matrice dont tous les coefficients sont nuls, sauf celui en (i,j) qui vaut 1. Ainsi, il suffit de montrer le résultat pour une matrice de transvection. Mais c'est alors un cas particulier de l'exercice 2 vu précédemment : on identifie $\mathbb{R}^d$ à $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{\{2,\dots,d\}}$, on prend $\mu = \lambda^{d-1}$ et $f(x) = \alpha\langle x, e_j\rangle e_i$. □

Théorème 4.12.4. *Soit $M \in M_d(\mathbb{R})$. Pour tout borélien A, on a*

$$\lambda^d(MA) = |\det M|\lambda^d(A).$$

En particulier, pour tout $c \in \mathbb{R}$, $\lambda^d(cA) = |c|^d\lambda^d(A)$.

Démonstration. Dans le cas où $M = \mathrm{diag}(\lambda, 1, \dots, 1)$, on vérifie facilement la formule lorsque A est un pavé : on a deux mesures qui coïncident sur un π-système qui engendre la tribu, elles sont donc égales. Passons au cas où M est inversible. On peut alors écrire $M = \mathrm{diag}(\det M, 1, \dots, 1)N$, où $N \in SL_d(\mathbb{R})$. Ainsi

$$\begin{aligned}\lambda^d(MA) &= \lambda^d(\mathrm{diag}(\det M, 1, \dots, 1)NA) = |\det M|\lambda^d(NA) \\ &= |\det M|\lambda^d(N^{-1}(NA)) = |\det M|\lambda^d(A).\end{aligned}$$

Reste le cas où M n'est pas inversible, dans ce cas $\det M = 0$, donc il faut montrer que $\lambda^d(MA) = 0$. Pour cela, il suffit de montrer que $\lambda^d(\mathrm{Im}\ M) = 0$. Or Im M est un espace vectoriel de dimension au plus $d-1$, il existe donc une application inversible qui envoie Im M dans $\mathbb{R}^{d-1} \times \{0\}$. Comme $\mathbb{R}^{d-1} \times \{0\}$ est de mesure nulle, Im M aussi. □

Corollaire 4.12.5. *Si M est inversible, la mesure image de λ^d par $x \mapsto Mx + b$ est $\frac{1}{|\det M|}\lambda^d$.*

4.12.2 Exercice : la fonction Beta

Rappelons que la fonction *Gamma* $\Gamma : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ est définie pour tout $x > 0$ par $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\, dt$.

1. Montrer que quels que soient $x, y > 0$, on a
$$\Gamma(x)\Gamma(y) = \int_{\mathbb{R}^2} (G \circ T)(t_1, t_2)\ d(\lambda \otimes \lambda)(t_1, t_2),$$
où $G(t, s) = t^{x-1}(s-t)^{y-1}e^{-t}\ \mathbb{1}_{\{0 \le t \le s\}}$ et $T(t_1, t_2) = (t_1, t_1 + t_2)$.
2. Montrer que
$$\Gamma(x)\Gamma(y) = \int_{\mathbb{R}^2} G(t, s)\ d(\lambda \otimes \lambda)(s, t).$$
3. En déduire que
$$\beta(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x + y)},$$
où la fonction *Beta* $\beta : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ est définie pour tous $x > 0$, $y > 0$ par $\beta(x, y) = \int_0^1 \theta^{x-1}(1-\theta)^{y-1}\ d\theta$.

Solution

1. D'après le théorème de Tonelli, on a
$$\Gamma(x)\Gamma(y) = \int_{\mathbb{R}^2} t_1^{x-1}t_2^{y-1}e^{-(t_1+t_2)}\ \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t_1)\ \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t_2)\ d(\lambda \otimes \lambda)(t_1, t_2).$$

Il n'est pas difficile de vérifier que

$$t_1^{x-1} t_2^{y-1} e^{-(t_1+t_2)}\ \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t_1)\ \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t_2) = (G \circ T)(t_1, t_2),$$

ce qui donne le résultat voulu.

2. D'après le théorème de transfert pour les fonctions mesurables positives,

$$\int_{\mathbb{R}^2} G \circ T(t_1, t_2)\ d(\lambda \otimes \lambda)(t_1, t_2) = \int_{\mathbb{R}^2} G(t, s)\ d\mu(s, t),$$

où μ est la mesure image de $\lambda \otimes \lambda$ par T. Or l'application T est de déterminant 1, donc laisse invariante la mesure $\lambda \otimes \lambda$.
On a donc $\mu = \lambda \otimes \lambda$, d'où

$$\Gamma(x)\Gamma(y) = \int_{\mathbb{R}^2} G(t, s)\ d(\lambda \otimes \lambda)(s, t).$$

3. D'après le théorème de Tonelli, on a

$$\int_{\mathbb{R}^2} G(t, s)\ d(\lambda \otimes \lambda)(s, t) = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} G(t, s)\ d\lambda(t) \right)\ d\lambda(s).$$

À s fixé, calculons $\int_{\mathbb{R}} G(t, s)\ d\lambda(t)$. Si $s < 0$, l'intégrale est évidemment nulle. Sinon,

$$\int_{\mathbb{R}} G(t, s)\ d\lambda(t) = e^{-s} \int_0^s t^{x-1}(s-t)^{y-1}\ dt.$$

En posant $t = \theta s$, on a facilement

$$\int_{\mathbb{R}} G(t, s)\ d\lambda(t) = e^{-s} s^{x+y-1} \int_0^1 \theta^{x-1}(1-\theta)^{y-1}\ d\theta = e^{-s} s^{x+y-1} \beta(x, y).$$

Finalement, on obtient le résultat voulu

$$\Gamma(x)\Gamma(y) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-s} s^{x+y-1} \beta(x, y)\ d\lambda(s) = \beta(x, y)\Gamma(x+y).$$

Corollaire 4.12.6. *Soient M une matrice inversible et $b \in \mathbb{R}^d$. On pose $T(x) = Mx + b$. Soit μ_1 une mesure positive sur $\mathbb{R}^d$ admettant une densité f_1 par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$. Alors, la mesure image de μ_1 par T admet comme densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$ la fonction f_2 définie par*

$$f_2(y) = \frac{1}{|\det M|} f_1(T^{-1}(y)).$$

Démonstration. Soit g une fonction mesurable positive sur $\mathbb{R}^d$. Notons μ_2 la mesure image de μ_1 par T. D'après le théorème de transfert,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d} g\ d\mu_2 &= \int_{\mathbb{R}^d} (g\circ T)\ d\mu_1 = \int_{\mathbb{R}^d} (g\circ T) f_1\ d\lambda^d \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} (g\circ T)(f_1\circ T^{-1}\circ T)\ d\lambda^d \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} (g\times f_1\circ T^{-1})\circ T\ d\lambda^d \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} (g\times f_1\circ T^{-1})\ d\lambda^d_T \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} g\times (f_1\circ T^{-1})\frac{1}{|\det M|}\ d\lambda^d
\end{aligned}$$

ce qui donne le résultat voulu. □

Les théorèmes qui précèdent correspondent à des transformations affines, ou si l'on préfère, à des changements de variables affines. On va maintenant voir le cas général.

4.12.3 Changement de variables C^1

Théorème 4.12.7. *Soient U, U' deux ouverts de $\mathbb{R}^d$, ϕ un C^1-difféomorphisme de U dans U'. Soit f une application mesurable définie sur U'. Alors f est intégrable sur U' si et seulement si $f\circ\phi(.)\times|\det D.\ \phi|$ est intégrable sur U et dans ce cas*

$$\int_{U'} f(y)\ d\lambda(y) = \int_U f(\phi(x))\times|\det D_x\ \phi|\ d\lambda(x).$$

Remarque. La quantité $\det D_x\ \phi$ est appelée déterminant jacobien (ou plus simplement Jacobien) de ϕ au point x.

Nous avons choisi d'admettre ce théorème. Sa démonstration, difficile, est basée sur le calcul différentiel et nous semble assez éloignée des techniques que ce cours se propose d'enseigner. On pourra trouver une démonstration dans les ouvrages cités en référence.

Application : calcul de l'intégrale de Gauss

On prend $U =]0,+\infty[\times]0,2\pi[$, $U' = \mathbb{R}^2\backslash(\mathbb{R}_+\times\{0\})$ et $f(x,y) = \exp(-\frac{x^2+y^2}{2})$. On fait le changement de variable polaire : $\phi(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$. D'un côté, on a

$$\int_{U'} f(x,y)\ d(\lambda\otimes\lambda)(x,y) = \int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\ d(\lambda\otimes\lambda)(x,y) = I^2,$$

avec $I=\int_{\mathbb{R}}\exp(-\frac{x^2}{2})\ d\lambda(x)$, où la dernière égalité vient du théorème de Tonelli. De l'autre, on a

$$|\det D_{r,\theta}\ \phi| = \begin{vmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{vmatrix} = r,$$

d'où

$$\int_{]0,+\infty[\times]0,2\pi[} e^{-\frac{r^2}{2}} r\ d(\lambda\otimes\lambda)(r,\theta) = \int_{]0,+\infty[} (2\pi) r e^{-\frac{r^2}{2}} r e^{-\frac{r^2}{2}}\ d\lambda(r) = 2\pi.$$

Pour la dernière égalité, on a remarqué que $-e^{-r^2/2}$ est une primitive de $re^{-\frac{r^2}{2}}$. On a donc $I^2=2\pi$, soit

$$I = \int_{\mathbb{R}} \exp(-\frac{x^2}{2})\ d\lambda(x) = \sqrt{2\pi}.$$

Application : mesure image par un C^1-difféomorphisme

Corollaire 4.12.8. *Soient O_1 et O_2 deux ouverts de $\mathbb{R}^d, d\geq 1$. On suppose que T est un C^1-difféomorphisme de O_1 dans O_2. Soit maintenant μ_1 une mesure positive sur $\mathbb{R}^d$ telle que $\mu_1(\mathbb{R}^d\backslash O_1)=0$ et admettant une densité f_1 par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$. Alors, la mesure image de μ_1 par T admet comme densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$ la fonction f_2 définie par*

$$f_2(y) = \begin{cases} f_1(T^{-1}(y))|\det DT_y^{-1}| \ \textit{si}\ y\in O_2\\ 0\ \textit{si}\ y\notin O_2\end{cases}$$

Démonstration. Soit g une fonction mesurable positive sur O_2. Notons μ_2 la mesure image de μ_1 par T. D'après le théorème de transfert,

$$\begin{aligned}
\int_{O_2} g\ d\mu_2 &= \int_{O_1} (g\circ T)\ d\mu_1 = \int_{O_1} (g\circ T) f_1\ d\lambda\\
&= \int_{O_1} (g\circ T) f_1\ |\det D_{T(x)} T^{-1}||\det D_x T|\ d\lambda\\
&= \int_{O_1} (g\times (f_1\circ T^{-1})\times|\det D_. T^{-1}|)\circ T\ |\det D_x T|\ d\lambda\\
&= \int_{O_2} g\times (f_1\circ T^{-1})\times |\det D_. T^{-1}|\circ T\ d\lambda
\end{aligned}$$

ce qui donne le résultat voulu. □

4.12.4 Intégration des fonctions radiales

Théorème 4.12.9. *Soit $\|.\|$ une norme quelconque sur $\mathbb{R}^n$. On note V le volume de la boule unité pour cette norme. Alors, pour toute fonction ϕ mesurable de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$, l'application $x \mapsto \phi(\|x\|)$ est intégrable par rapport à $\lambda^{\otimes n}$ si et seulement si $\int_{\mathbb{R}_+} nt^{n-1}|\phi(t)|\ d\lambda(t) < +\infty$ et alors*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \phi(\|x\|)\ d\lambda^{\otimes n}(x) = V \int_{\mathbb{R}_+} \phi(t) nt^{n-1}\ d\lambda(t).$$

Démonstration. D'après le théorème de transfert, $\phi \circ \|.\|$ est intégrable si et seulement si ϕ est intégrable par rapport à la mesure image de $\lambda^{\otimes n}$ par $\|.\|$, et on aura alors

$$\int_{\mathbb{R}^n} \phi(\|x\|)\ d\lambda^{\otimes n}(x) = \int_{\mathbb{R}_+} \phi(t)\ dm(t).$$

Il suffit donc de caractériser m. Soit $a \geq 0$. En utilisant successivement la définition d'une mesure image, l'homogénéité d'une norme, et la propriété d'échelle de la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$, on a

$$m([0,a]) = \lambda^{\otimes n}(B(0,a)) = \lambda^{\otimes n}(aB(0,1)) = a^n \lambda^{\otimes n}(B(0,1)) = Va^n.$$

Comme les intervalles $[0,a]$ forment un π-système qui engendre la tribu borélienne de $\mathbb{R}_+$, avec $\mathbb{R}_+ = \bigcup_{i=0}^{+\infty} [0,i]$, le théorème 3.4.1 nous dit que la connaissance de m sur les intervalles $([0,a])_{a \in \mathbb{R}_+}$ permet de l'identifier. Or il est facile de voir que

$$Va^n = \int_{[0,a]} Vnt^{n-1}\ d\lambda(t),$$

donc m est la mesure dont la densité par rapport à la mesure de Lebesgue est $t \mapsto Vnt^{n-1}\mathbb{1}_{[0,+\infty[}(t)$. On en déduit que

$$\int_{\mathbb{R}_+} \phi(t)\ dm(t) = V \int_{\mathbb{R}_+} \phi(t) nt^{n-1}\ d\lambda(t),$$

ce qui est le résultat voulu. □

Corollaire 4.12.10. *Le volume de la boule unité euclidienne de $\mathbb{R}^n$ est*

$$V_n = \frac{2\pi^{n/2}}{n\Gamma(n/2)}.$$

Démonstration. On prend $\phi(x) = \exp(-\frac{x^2}{2})$. Le théorème de Tonelli donne

$$\int_{\mathbb{R}^d} \exp(-\frac{\|x\|_2^2}{2})\ d\lambda^{\otimes n}(x) = \left(\int_{\mathbb{R}} \exp(-\frac{x^2}{2})\ d\lambda(x)\right)^n = (2\pi)^{n/2}.$$

D'autre part

$$\int_{\mathbb{R}_+} \exp(-\frac{t^2}{2}) n t^{n-1}\ d\lambda(t) = \int_{\mathbb{R}_+} \exp(-u) n (2u)^{n/2-1}\ d\lambda(u) = 2^{\frac{n}{2}-1} n \Gamma(\frac{n}{2}).$$

En faisant le quotient et en appliquant le théorème précédent, on obtient le résultat voulu. □

Remarque. L'astuce est évidemment de trouver une fonction ϕ pour laquelle on sait calculer les deux intégrales. Ce n'est tout de même pas si fréquent. La méthode permet également de calculer le volume de la boule unité de $\|.\|_p$, définie par $\|x\|_p^p = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^p$, en prenant $\phi(x) = \exp(-x^p)$ (exercice laissé au lecteur ; on trouvera comme volume $\frac{2^n \Gamma(\frac{1}{p}+1)^n}{\Gamma(\frac{n}{p}+1)}$).

4.13 Preuve des propriétés de base de l'intégrale

4.13.1 Premiers résultats

L'implication $(f \le g) \implies \int f\ d\mu \le \int g\ d\mu$ découle évidemment de la définition, de même que le fait que l'intégrale d'une fonction nulle est nulle.

Ce qui est assez étonnant, c'est que la linéarité ne puisse être obtenue simplement ; nous l'obtiendrons en réalité comme corollaire du lemme de Beppo Levi.

Pour $(\Omega_i)_{i\in I}$ partition finie, notons

$$I((\Omega_i)_{i\in I}, f) = \sum_i \inf\{f(\omega); \omega \in \Omega_i\} \mu(\Omega_i).$$

Il est important de remarquer que si $(\Omega_i)_{i\in I}$ est une partition finie et $(\Omega'_j)_{j\in I}$ une autre partition finie, alors

$$I((\Omega_i \cap \Omega'_j)_{(i,j)\in I\times J}, f) \ge I((\Omega_i)_{i\in I}, f)$$

et

$$I((\Omega_i \cap \Omega'_j)_{(i,j)\in I\times J}, f) \ge I((\Omega'_j)_{j\in J}, f).$$

Lemme 4.13.1. *Si une fonction est μ-presque partout nulle, alors son intégrale par rapport à μ est nulle.*

Démonstration. Il suffit de considérer le cas d'une fonction positive, car si f est presque partout nulle, f^+ et f^- le sont aussi. Si une fonction f positive est μ-presque partout nulle, alors pour tout i tel que $\inf\{f(\omega); \omega \in \Omega_i\} > 0$, on a $\mu(\Omega_i) \le \mu(f \ge \inf\{f(\omega); \omega \in \Omega_i\}) \le \mu(f > 0) = 0$. Cela entraîne que pour toute partition finie, $I((\Omega_i)_{i\in I}, f) = 0$, d'où la nullité de l'intégrale. □

Lemme 4.13.2. *Soient f mesurable positive, $\alpha > 0$ et A mesurable. Alors*

$$\int (f + \alpha \mathbb{1}_A)\, d\mu = \int f\, d\mu + \alpha\mu(A).$$

Démonstration. Soit $(\Omega_i)_{i\in\Omega_i}$ une partition quelconque. Posons $J = \{1, 2\}$ avec $\Omega'_1 = A$, $\Omega'_2 = A^c$.

Comme $\inf\{f(\omega)+\alpha\mathbb{1}_A(\omega); \omega \in \Omega_i\cap\Omega'_j\} = \inf\{f(\omega); \omega \in \Omega_i\cap\Omega'_j\}+\alpha\mathbb{1}_{i=1}$, on a en multipliant par $\mu(\Omega_i\cap\Omega'_j)$ et en faisant la somme sur les couples (i, j) :

$$I((\Omega_i \cap \Omega'_j)_{(i,j)\in I\times J}, f + \alpha\mathbb{1}_A) = I((\Omega_i \cap \Omega'_j)_{(i,j)\in I\times J}, f) + \alpha\mu(A).$$

Ainsi

$$\begin{aligned} I((\Omega_i)_{i\in I}, f + \alpha\mathbb{1}_A) &\leq I((\Omega_i \cap \Omega'_j)_{(i,j)\in I\times J}, f + \alpha\mathbb{1}_A) \\ &= I((\Omega_i \cap \Omega'_j)_{(i,j)\in I\times J}, f) + \alpha\mu(A) \\ &\leq \inf f\, d\mu + \alpha\mu(A), \end{aligned}$$

d'où en passant au supremum :

$$\int (f + \alpha\mathbb{1}_A)\, d\mu \leq \int f\, d\mu + \alpha\mu(A).$$

Réciproquement, soit $M < \int f\, d\mu$. Il existe une partition finie $(\Omega_i)_{i\in I}$, avec $I((\Omega_i)_{i\in I}, f) > M$. On a alors

$$\begin{aligned} \int (f + \alpha\mathbb{1}_A)\, d\mu &\geq I((\Omega_i \cap \Omega'_j)_{(i,j)\in I\times J}, f + \alpha\mathbb{1}_A) \\ &= I((\Omega_i \cap \Omega'_j)_{(i,j)\in I\times J}, f) + \alpha\mu(A) \\ &> M + \mu(A). \end{aligned}$$

En passant au supremum en M, on obtient l'égalité voulue. □

En particulier, si f s'écrit comme la somme finie $f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\mathbb{1}_{A_i}$, avec pour tout i, $\alpha_i \geq 0$ et A_i mesurable, on a $\int f\, d\mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\mu(A_i)$. Ainsi, on obtient la linéarité pour les fonctions simples positives.

Remarquons également que pour f positive, comme $f \geq \alpha\ \mathbb{1}_{\{f\geq\alpha\}}$, on a $\int f\, d\mu \geq \alpha\mu(f \geq \alpha)$ [4]. Ainsi, si f positive est d'intégrale nulle, on a pour tout n : $0 = \int f\, d\mu \geq \frac{1}{n}\mu\left(f \geq \frac{1}{n}\right)$, soit $\mu(f \geq 1/n) = 0$, et donc d'après le théorème de continuité séquentielle décroissante, $\mu(f > 0) = 0$.

4. On reverra cette inégalité plus tard dans le cas où μ est une mesure de probabilité. Elle aura alors le nom d'inégalité de Markov.

4.13.2 Démonstration du théorème de Beppo Levi

1. On va d'abord montrer une forme très faible de ce résultat : si f est une fonction simple positive et $(E_n)_{n\geq 1}$ une suite croissante d'ensembles mesurables de réunion E, alors $\lim_{n\to+\infty} \int \mathbb{1}_{E_n} f\ d\mu = \int \mathbb{1}_E f\ d\mu$. En effet, si $f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}$, avec pour tout i, $\alpha_i \geq 0$, on a $f\mathbb{1}_{E_n} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i\cap E_n}$ et

$$\int \mathbb{1}_{E_n} f\ d\mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i \cap E_n).$$

La convergence vers $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i \cap E) = \int \mathbb{1}_E f\ d\mu$ découle alors du théorème de continuité séquentielle croissante.

2. Passons au cas général. On considère (f_n) une suite croissante de fonctions mesurables positives tendant vers f et on veut montrer que $\int f_n\ d\mu$ tend vers $\int f\ d\mu$. Bien sûr, la suite $(\int f_n\ d\mu)_n$ est croissante, majorée par $\int f\ d\mu$, donc la limite existe et est majorée par $\int f\ d\mu$. Il suffit donc de montrer que $\lim \int f_n\ d\mu \geq \int f\ d\mu$. Par définition de l'intégrale, il suffit de montrer que pour toute partition finie $(\Omega_i)_{i\in I}$, on a $\lim \int f_n\ d\mu \geq I((\Omega_i)_{i\in I}, f)$ Posons $g = \sum_{i\in I} \inf\{f(\omega), \omega \in \Omega_i\} \mathbb{1}_{\Omega_i}$. g est une fonction simple, avec $0 \leq g \leq f$.

Fixons $\alpha \in]0, 1[$ et posons $E_n = \{f_n \geq \alpha g\}$. Comme la suite (f_n) est croissante, la suite (E_n) est croissante. Comme les fonctions f_n et g sont mesurables, $E_n \in \mathcal{F}$. Si $g(\omega) = 0$, on a $\omega \in E_n$ pour tout n, sinon, comme $\lim f_n(\omega) = g(\omega) > \alpha g(\omega)$, on a $\omega \in E_n$ pour n assez grand. Finalement, la réunion des E_n est Ω tout entier. Ainsi, d'après la forme faible du théorème [5], c'est-à-dire la partie 1. de cette démonstration,

$$\lim_{n\to+\infty} \int \mathbb{1}_{E_n}\ \alpha g\ d\mu = \int \alpha g\ d\mu.$$

On a

$$f_n \geq \mathbb{1}_{E_n} f_n \geq \mathbb{1}_{E_n} \alpha g,$$

d'où

$$\lim \int f_n\ d\mu \geq \lim \int \mathbb{1}_{E_n} \alpha g\ d\mu = \int \alpha g\ d\mu,$$

soit

$$\lim \int f_n\ d\mu \geq \alpha I((\Omega_i)_{i\in I}, f).$$

5. Noter que si les f_n n'étaient pas mesurables, E_n ne serait pas nécessairement dans $\mathcal{F}$ et on ne pourrait invoquer la forme faible. L'hypothèse de mesurabilité sert donc bien à quelque chose !

En faisant tendre α vers 1, on obtient l'inégalité souhaitée

$$\lim \int f_n \, d\mu \geq I((\Omega_i)_{i \in I}, f).$$

4.13.3 Preuve de la linéarité

Soient f, g deux fonctions mesurables positives, $\alpha > 0$. On veut montrer que $\int (f + \alpha g) \, d\mu = \int f \, d\mu + \alpha \int g \, d\mu$. Soient $(f_n), (g_n)$ des suites croissantes de fonctions simples positives convergeant respectivement vers f et g. On a pour tout n

$$\int (f_n + \alpha g_n) \, d\mu = \int f_n \, d\mu + \alpha \int g_n \, d\mu.$$

En appliquant trois fois le théorème de Beppo Levi, on obtient à la limite $\int (f + \alpha g) \, d\mu = \int f \, d\mu + \alpha \int g \, d\mu$.

Passons au cas où f et g sont intégrables, de signe quelconque. On a $\int |\alpha g| \, d\mu \leq \int |\alpha| g^+ + |\alpha| g^- \, d\mu < +\infty$ en utilisant la linéarité pour les fonctions positives. Ainsi, on obtient pour $\alpha > 0$

$$\int \alpha g \, d\mu = \int (\alpha g)^+ \, d\mu - \int (\alpha g)^- \, d\mu = \alpha \int g^+ \, d\mu - \alpha \int g^- \, d\mu = \alpha \int g \, d\mu$$

et pour $\alpha < 0$

$$\int \alpha g \, d\mu = \int (\alpha g)^+ \, d\mu - \int (\alpha g)^- \, d\mu = (-\alpha) \int g^- \, d\mu + \alpha \int g^+ \, d\mu = \alpha \int g \, d\mu.$$

On est ainsi ramené à étudier le cas $\alpha = 1$. Comme $|f + g| \leq |f| + |g|$, $f + g$ est intégrable. Posons $f + g = h$. On a $f^+ - f^- + g^+ - g^- = h^+ - h^-$, soit $f^+ + g^+ + h^- = f^- + g^- + h^+$. D'où en intégrant

$$\int f^+ + \int g^+ + \int h^- = \int f^- + \int g^- + \int h^+.$$

En changeant de membre, on obtient le résultat voulu.

Maintenant qu'on a la linéarité, montrons que si $f \leq g$ μ-presque partout, alors $\int f \, d\mu \leq \int g \, d\mu$. Écrivons $f = f \, \mathbb{1}_{\{f \leq g\}} + f \, \mathbb{1}_{\{f > g\}}$ et $g = g \, \mathbb{1}_{\{f \leq g\}} + g \, \mathbb{1}_{\{f > g\}}$. Comme $f \, \mathbb{1}_{\{f > g\}}$ et $g \, \mathbb{1}_{\{f > g\}}$ sont nulles et donc d'intégrale nulle, donc par linéarité $f = f \, \mathbb{1}_{\{f \leq g\}}$ a même intégrale que f, et $g = g \, \mathbb{1}_{\{f \leq g\}}$ a même intégrale que g. Comme $f \, \mathbb{1}_{\{f \leq g\}} \leq g \, \mathbb{1}_{\{f \leq g\}}$, on a en intégrant le résultat voulu.

Ceci achève la preuve des propriétés de base de l'intégrale.

4.14 Premiers exercices d'intégration

4.14.1 Exercices corrigés

Exercice 21. Montrer l'existence de $\int_{]0,1]}\{\frac{1}{x}\}\ d\lambda(x)$, puis montrer que

$$\int_{]0,1]}\{\frac{1}{x}\}\ d\lambda(x) = 1-\gamma,$$

où γ est la constante d'Euler.[6]

Indication : on pourra noter que $\{\frac{1}{x}\} = \lim_{n\to+\infty} \{\frac{1}{x}\}\mathbb{1}_{]1/n,1]}(x)$.

Exercice 22. *Continuité de la transformée de Laplace.*
Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{C}$. On suppose que l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} f(t)\ dt$ existe (c'est-à-dire que $\int_0^T f(t)\ dt$ admet une limite quand T tend vers $+\infty$). Montrer que pour tout $\lambda \ge 0$, l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} f(t)\ dt$ existe et que la fonction $\lambda \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} f(t)\ dt$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 23. Le but de cet exercice est de montrer le *théorème du retour de Poincaré*. Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré et T une transformation, c'est-à-dire une application mesurable de $(\Omega, \mathcal{F})$ dans lui-même. On suppose que μ est une mesure finie et qu'elle est invariante sous l'action de T, c'est-à-dire que la mesure image de μ par l'application T est μ elle-même. Alors, le théorème du retour dit que pour tout ensemble mesurable A de mesure non nulle, la suite des itérées $(T^n(x))_{n\ge 0}$ passe une infinité de fois dans A pour presque tout x appartenant à A.

1. On pose $N(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{1}_A(T^k(x))$ ainsi que $Y(x) = \exp(-N(x))$, avec la convention $\exp(-(+\infty)) = 0$. Montrer que Y est une application mesurable intégrable par rapport à μ.
2. On pose $Z(x) = Y(Tx)$. Montrer que $Y(x) = e^{-\mathbb{1}_A(x)} Z(x)$, puis que $\int Y(x)\ d\mu(x) = \int Z(x)\ d\mu(x)$.
3. Conclure.

Exercice 24.

Étudier la limite, lorsque n tend vers l'infini de

1. $\int_0^{+\infty} \frac{\log(x+n)}{n} e^{-x} \cos x\ dx$.
2. $\int_0^1 \frac{1+nx}{(1+x)^n}\ dx$.

6. On pourra trouver d'autres intégrales du même style avec des applications à la théorie des nombres dans l'ouvrage de Pólya et Szegö [25], Partie II, chapitre 1, paragraphe 5.

3. $\int_1^{+\infty} \frac{1+nx}{(1+x)^n}\ dx$.

Exercice 25. *Intégrales de Wallis.*

1. On pose
$$W_n = \int_0^{\pi/2} (\cos\theta)^n\ d\theta.$$
Montrer que $W_n = \frac{n-1}{n} W_{n-2}$. En déduire que la suite $(nW_nW_{n-1})_{n\geq 1}$ est constante.
2. Montrer que $W_nW_{n+1} \leq W_n^2 \leq W_nW_{n-1}$. En déduire l'équivalent à l'infini
$$W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

Exercice 26. *Calcul de l'intégrale de Gauss.*

1. On pose $J_n = \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n\ dt$. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} J_n = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\ dt$.
2. Exprimer J_n en fonction d'une intégrale de Wallis. En déduire la valeur de l'intégrale de Gauss :
$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2/2}\ dt = \frac{1}{2}\sqrt{2\pi} = \sqrt{\pi/2}.$$

Exercice 27. *Calcul de* $\Gamma(1/2)$.
Connaissant la valeur de l'intégrale de Gauss, montrer que
$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}.$$

Exercice 28. 1. À l'aide d'un développement en série entière, montrer que
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1} = \int_0^1 \frac{dx}{x^3+1}.$$

2. On donne
$$\frac{1}{x^3+1} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1+x} - \frac{x-2}{x^2-x+1}\right).$$
Montrer que
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1} = \frac{3\log 2 + \sqrt{3}\pi}{9}.$$

Exercice 29. *Calcul de l'intégrale de Dirichlet à l'aide d'une intégrale à paramètre.*

1. Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\ dt$ est convergente, mais que la fonction $\frac{\sin t}{t}$ n'est pas intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}_+$. Montrer de plus l'équivalent à l'infini $\int_0^{n\pi} \frac{|\sin t|}{t}\ dt \sim \frac{2}{\pi}\log n$.

2. On pose, pour $x \geq 0$, $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} e^{-xt}\, dt$. Montrer que F est définie sur $\mathbb{R}_+$, dérivable sur $]0, +\infty[$, avec $F'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$.
3. Calculer F et en déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt$.

Exercice 30. *Calcul d'intégrales liées aux intégrales de Fresnel.*
Le but de cet exercice est le calcul des intégrales de la forme

$$\int_0^{+\infty} e^{iu} u^{\alpha-1}\, du, \quad 0 < \alpha < 1$$

et d'intégrales liées.

1. On pose, pour $\lambda \geq 0$,

$$\phi(\lambda) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda u}\, e^{iu} u^{\alpha-1}\, du.$$

   Montrer que ϕ définit une fonction continue sur $[0, +\infty[$.
   Indication : couper l'intégrale en deux. La partie entre 0 et 1 ne pose pas de difficulté ; pour le reste on pourra faire une intégration par parties.
2. Montrer que ϕ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et satisfait l'équation différentielle $\phi'(\lambda) = \frac{\alpha}{i-\lambda}\phi(\lambda)$. En déduire que pour tout $\lambda > 0$, on a

$$\phi(\lambda) = \phi(0) \frac{1}{(\lambda^2+1)^{\alpha/2}} \exp(-\alpha i \arctan \lambda).$$

3. Montrer que pour tout $\lambda > 0$, on a

$$\phi(0) = (1 + \lambda^{-2})^{\alpha/2} \exp(\alpha i \arctan \lambda) \int_0^{+\infty} e^{-x} e^{i\frac{x}{\lambda}} x^{\alpha-1}\, dx.$$

4. En déduire que

$$\int_0^{+\infty} e^{iu} u^{\alpha-1}\, du = \exp\left(i\alpha\frac{\pi}{2}\right)\Gamma(\alpha),$$

   et en particulier, comme $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos u}{\sqrt{u}}\, du = \int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{\sqrt{u}}\, du = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

5. Calculer les intégrales de Fresnel

$$\int_0^{+\infty} \cos(u^2)\, du \text{ et } \int_0^{+\infty} \sin(u^2)\, du.$$

Exercice 31. *Calcul de l'intégrale de Dirichlet.*
Soit $a > 0$. Montrer que la fonction, $f : (x, y) \mapsto e^{-xy} \sin x$, est intégrable sur $[0, a] \times [0, +\infty[$. On pose $I_a = \int_{[0,a]\times[0,+\infty[} f(x, y)\ d\lambda \otimes \lambda(x, y)$. Déterminer la limite de I_a quand a tend vers $+\infty$. En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx$.

Exercice 32. Les fonctions $f(x, y)$ suivantes sont-elles intégrables sur le pavé $[0, 1] \times [0, 1]$?

1. $(x - y)(x^2 + y^2)^{-3/2}$.
2. $(1 - xy)^p$ avec $p < 0$.
3. $(x^2 - y^2)/(x^2 + y^2)^2$.
4. $(x - y)/(x + y)^3$.

Exercice 33. Calculer l'intégrale $I = \int_{V(a,b,c)}(x^2 + y^2 + z^2)\ d\lambda^{\otimes 3}(x, y, z)$, où

$$V(a, b, c) = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1\right\}.$$

On rappelle que le volume de la boule unité de $\mathbb{R}^3$ est $\frac{4}{3}\pi$.
Indication : commencer par traiter le cas où $a = b = c = 1$.

Exercice 34. *Théorème de Minkowski. Application : le théorème des 4 carrés.*
Soit d un entier, avec $d \geq 2$. Pour $u_1, \ldots, u_d$ vecteurs de $\mathbb{R}^d$, on rappelle que $\det(u_1, \ldots, u_d)$ est le déterminant de la matrice dont les colonnes sont les coordonnées de $u_1, \ldots, u_d$ dans la base canonique.
Une partie A de $\mathbb{R}^d$ est dite *convexe* si quels que soient a et b dans A et $\theta \in [0, 1]$, $\theta a + (1 - \theta)b \in A$. Une partie A de $\mathbb{R}^d$ est dite symétrique par rapport à l'origine si pour tout $a \in A$, $-a \in A$.

Si $(u_1, \ldots, u_d)$ sont des vecteurs de $\mathbb{R}^d$ formant une partie libre, l'ensemble

$$S = \left\{\sum_{k=1}^{d} z_i u_i; z \in \mathbb{Z}^d\right\}$$

est appelé un réseau.

Le but de l'exercice est de montrer le théorème suivant, dû à Minkowski. Soit A un convexe de $\mathbb{R}^d$ symétrique par rapport à l'origine. Si le réseau S basé sur $u_1, \ldots, u_d$ est tel que $\lambda^d(A) > 2^d|\det(u_1, \ldots, u_d)| > 0$, alors A rencontre le réseau S en un point différent de $(0, \ldots, 0)$.

1. On pose $T = [0, 1[^d$. Montrer que les ensembles $\left((\frac{1}{2}A) \cap (s + T)\right)_{s\in\mathbb{Z}^d}$ forment une partition de $\frac{1}{2}A$.

2. Montrer que si $\lambda^d 2(A) > 2^d$, alors les ensembles $(\frac{1}{2}A + s)_{s \in \mathbb{Z}^d}$ ne sont pas deux à deux disjoints. En déduire qu'alors A intersecte $\mathbb{Z}^d \backslash \{(0, \dots, 0)\}$.
3. Montrer le théorème voulu dans le cas général.
4. (a) Soit p un nombre premier. Calculer le nombre de carrés dans $\mathbb{F}_p$. En déduire qu'il existe des entiers r et s tels que $r^2 + s^2 + 1$ soit divisible par p.
   (b) Soit A l'image de $\mathbb{Z}^d$ par l'application de matrice
   $$\begin{pmatrix} p & 0 & r & s \\ 0 & p & s & -r \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
   Montrer que le carré de la norme euclidienne d'un point de A est divisible par p. Montrer que A rencontre la boule euclidienne ouverte de rayon $\sqrt{2p}$ ailleurs qu'en zéro. (On rappelle que le volume de la boule unité de $\mathbb{R}^4$ est $\frac{\pi^2}{2}$.)
   (c) On rappelle l'identité de Lagrange :
   si $X = bc' - b'c$,$Y = ca' - c'a$,$Z = ab' - a'b$,$T = aa' + bb' + cc'$, alors $X^2 + Y^2 + Z^2 + T^2 = (a^2 + b^2 + c^2) \cdot (a'^2 + b'^2 + c'^2)$. Montrer que tout entier s'écrit comme somme de 4 carrés d'entiers.

4.14.2 Exercices non corrigés

1. Soit $\mathcal{C}_b$ l'ensemble des fonctions continues bornées sur $\mathbb{R}$. Soient μ et ν deux mesures finies sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Montrer que si pour toute $f \in \mathcal{C}_b$, on a $\int_{\mathbb{R}} f \, d\mu = \int_{\mathbb{R}} f \, d\nu$, alors $\mu = \nu$.
2. Soient μ une mesure finie sur $(\Omega, \mathcal{F})$ et f une application finie μ-presque partout. Montrer que les quatre conditions suivantes sont équivalentes :
   (a) f est intégrable par rapport à μ.
   (b) $\int_{\{|f|>n\}} |f| \, d\mu$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini.
   (c) $\sum_{n=1}^{+\infty} n\mu(n < |f| \leq n+1) < +\infty$.
   (d) $\sum_{n=0}^{+\infty} \mu(|f| > n) < +\infty$.

   Indication : montrer $a \iff b, a \iff c, d \Longrightarrow c, (c\&b) \Longrightarrow d$.
3. Soient μ une mesure sur $(\Omega, \mathcal{F})$ et f intégrable par rapport à μ. Montrer que la fonction
   $$g = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} f^2 \mathbb{1}_{\{n>|f|\}}$$
   est intégrable par rapport à μ.

4. *Intégration par rapport à une somme de mesures.*
   Soit $(\mu_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de mesures définies sur un espace $(\Omega, \mathcal{F})$.
   (a) Montrer que $\mu = \sum_{i=0}^{+\infty} \mu_i$ est une mesure sur $(\Omega, \mathcal{F})$.
   (b) Montrer que pour f mesurable positive, puis pour f intégrable, on a
   $$\int_\Omega f\ d\mu = \sum_{i=0}^{+\infty} \int_\Omega f\ d\mu_i.$$
5. Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite croissante d'applications μ-intégrables convergeant μ-presque partout vers f. On suppose qu'il existe une constante K telle que
   $$\forall n \geq 0 \quad \int f_n\ d\mu \leq K.$$
   Montrer que f est μ-intégrable et que $\int |f_n - f|\ d\mu$ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini.
6. Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite décroissante d'applications μ-mesurables positives. On suppose que f_1 est μ-intégrable. Montrer que (f_n) converge simplement vers une fonction mesurable f, que f est μ-intégrable et que $\int |f_n - f|\ d\mu$ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini.
7. Soit f une fonction réelle intégrable sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$. Montrer que si pour tout $A \in \mathcal{F}$, on a $\int_A f\ d\mu = 0$, alors $f = 0$ presque partout.
8. (a) Calculer $I_n = \int_0^1 x^n \log x\ dx$ pour $n \in \mathbb{N}$.
   (b) En déduire la valeur de $\int_0^1 \frac{\log x}{1-x}\ dx$, sachant que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.
   (c) En calculant de deux manières différentes l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 (1-x)^n \log(x)\ dx$, montrer que pour $n \geq 0$, on a
   $$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{(k+1)^2} = \frac{H_{n+1}}{n+1}, \text{ où } H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$
9. Démontrer que
   $$\int_0^1 (e^x - 1)(\log x + \frac{1}{x})\, d\lambda(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2+n+1}{n(n+1)(n+1)!}.$$
10. Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\, dx$. En déduire $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.
11. Démontrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{e^x - 1}\ dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{n^2+a^2}$.

12. Démontrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{(x\log x)^2}{1+x^2}\ dx = 2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+3)^3}$.

13. *Fonction Gamma.*
On définit la fonction Γ sur $]0,+\infty[$ par
$$\Gamma(x) = \int_{]0,+\infty[} e^{-t}t^{x-1}\ d\lambda(t).$$
Montrer que cette fonction est bien définie et qu'elle vérifie, pour tout réel $x > 0$, l'égalité $\Gamma(x+1) = x\cdot\Gamma(x)$. En particulier, vérifier que pour tout entier $n \geq 0$, on a :
$$\Gamma(n+1) = n\,! \quad \text{et} \quad \Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{(2n)\,!}{2^{2n}\cdot n\,!}.$$

14. *Formule de Stirling.*
    (a) Montrer que $\int_{2n}^{+\infty} x^n e^{-x}\ dx = o(\Gamma(n+1))$.
    (b) Montrer l'équivalent à l'infini $\frac{\Gamma(n+1)}{e^{-n}n^{n+1/2}} \sim \int_{-\sqrt{n}}^{\sqrt{n}}(1+\frac{u}{\sqrt{n}})^n e^{-u\sqrt{n}}\ du.$
    (c) Montrer que pour tout $x \in]-1,1[$, on a $\log(1+x) - x \leq -\frac{x^2}{6}$.
    (d) On rappelle que $\int_0^{+\infty} e^{-t^2/2}\ dt = \frac{1}{\sqrt{\pi/2}}$. Montrer que
$$\Gamma(n+1) \sim \sqrt{2\pi}e^{-n}n^{n+1/2}.$$

15. *Fonction Gamma (suite).*
    (a) Démontrer que la fonction Γ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$ et que pour tout entier $n \geq 1$,
$$\Gamma^{(n)}(x) = \int_{]0,+\infty[} e^{-t}(\log t)^n t^{x-1}\,d\lambda(t).$$
    (b) Pour tous réels $a, s > 0$, exprimer $\displaystyle\int_{]0,+\infty[} t^{s-1}e^{-at}d\lambda(t)$ à l'aide de la fonction Γ, puis démontrer que pour tout réel $s > 1$,
$$\int_{]0,+\infty[}\frac{t^{s-1}}{e^t-1}\,d\lambda(t) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\Gamma(s)}{n^s} < +\infty.$$
    (c) Démontrer que pour tout entier $n \geq 0$, on a l'identité
$$\int_{\mathbb{R}_+} t^{2n}e^{-t^2}\,d\lambda(t) = \frac{\Gamma(n+\frac{1}{2})}{2}.$$

(d) Démontrer que $\int_{\mathbb{R}_+} e^{-t^2} \cos(at)\, d\lambda(t) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \exp\left(-\frac{a^2}{4}\right)$, pour tout réel a.

16. Pour $x \geq 0$, on pose $R(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\, du$. Le but de l'exercice est de démontrer l'identité

$$\int_0^{+\infty} \frac{R(x)}{\sqrt{x}}\, dx = \sqrt{2\pi}.$$

(a) Montrer que $R(x)$ est bien définie pour $x \geq 0$ et qu'on a en l'infini $R(x) = O(1/x)$. En déduire que R est bornée.

(b) $\frac{R(x)}{\sqrt{x}}$ est-elle intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}_+$?

(c) Pour $\lambda \geq 0$, on pose $R_\lambda(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u} e^{-\lambda u}\, du$. Justifier l'existence de $R_\lambda(x)$, puis montrer que pour tout réel $x > 0$, on a la relation $\lim\limits_{\lambda \to 0} R_\lambda(x) = R(x)$.

(d) Montrer que pour tout $\lambda > 0$, on a

$$\int_0^{+\infty} \frac{R_\lambda(x)}{\sqrt{x}}\, dx = 2 \int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{\sqrt{u}} e^{-\lambda u}\, du.$$

(e) Montrer finalement que

$$\int_0^{+\infty} \frac{R(x)}{\sqrt{x}}\, dx = \sqrt{2\pi}.$$

(On rappelle que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{\sqrt{u}}\, du = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.)

17. *Calcul de* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ *avec Fubini.*

Calculer de deux façons différentes :

$$J = \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} \frac{1}{1 + 2xy + y^2}\, dx\, dy.$$

18. (a) Soit ϕ une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}_+$. Montrer que l'on a

$$\int_{\mathbb{R}^d} \phi(\lfloor \|x\|_\infty \rfloor)\, d\lambda^d(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left((2n+2)^d - (2n)^d\right) \phi(n),$$

où $\|x\|_\infty = \max\limits_{1 \leq i \leq d} |x_i|$.

(b) Soit $\alpha > 0$. À quelle condition la fonction $x \mapsto \frac{1}{\|x\|_2^\alpha}$ est-elle intégrable sur le complémentaire de la boule unité ?

(c) Montrer que l'application

$$f : x \mapsto \frac{x}{\|x\|_2^2}$$

réalise un C^1-difféomorphisme de $\{x \in \mathbb{R}^d; 0 < \|x\|_2 < 1\}$ sur $\{x \in \mathbb{R}^d; 1 < \|x\|_2\}$ et que sa différentielle est

$$h \mapsto Df_x.h = \frac{\|x\|_2^2 h - 2\langle x, h\rangle x}{\|x\|_2^4}.$$

(d) Soit $\alpha > 0$. À quelle condition la fonction $x \mapsto \frac{1}{\|x\|_2^\alpha}$ est-elle intégrable sur la boule unité ?

19. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $(1+z/n)^n$ tend vers $\exp(z)$ lorsque n tend vers l'infini.

20. *Expression intégrale de* $\Gamma'(x)/\Gamma(x)$.
On note ψ la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par la relation

$$\psi(x) = \int_0^{+\infty} \left(\frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-xt}}{1 - e^{-t}} \right) \, dt.$$

Pour n entier naturel non nul, on pose

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

(a) Vérifier que ψ est bien définie.

(b) Montrer que pour tout entier $n \geq 1$,

$$H_n = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-(n+1)t}}{1 - e^{-t}} \, dt.$$

(c) Pour $u > 0$, on pose

$$F(u) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-ut}}{t} \, dt.$$

Vérifier que F est bien définie sur $]0, +\infty[$, puis montrer qu'elle est dérivable. En déduire la valeur de F.

(d) On pose

$$J_n = \int_0^{+\infty} e^{-nt} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{1 - e^{-t}} \right) \, dt.$$

Déterminer la limite de J_n quand n tend vers l'infini.

(e) En déduire que $\psi(1) = -\gamma$, où γ est la constante d'Euler.

(f) On pose $\beta(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$ (c'est la fonction Beta). Montrer que

$$\forall t > 0, \quad \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\frac{1}{\varepsilon} - \beta(\varepsilon, t - \varepsilon) \right) = -\Gamma'(1) + \frac{\Gamma'(t)}{\Gamma(t)}.$$

(g) On rappelle la représentation intégrale de la fontion Beta :

$$\beta(a,b) = \int_0^1 \theta^{a-1}(1-\theta)^{b-1}\, d\theta.$$

Montrer que

$$\frac{\Gamma'(t)}{\Gamma(t)} - \frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)} = \int_0^1 \frac{1-\theta^{t-1}}{1-\theta}\, d\theta.$$

(h) Montrer que $\frac{\Gamma'(t)}{\Gamma(t)} = \psi(t)$.