et

$$\left|\frac{f^{(n)}(re^{i\theta})}{n!}\right| = \left|e^{2i\pi n\theta}\frac{f^{(n)}(re^{i\theta})}{n!}\right| = \left|\sum_{k=0}^{+\infty} a_{n+k}e^{2i\pi(X_{n+k}+\theta(n+k))}\binom{n+k}{k}r^k\right|.$$

Ainsi si l'on note Ψ l'application de $[0,1]^{\mathbb{N}}$ dans $\overline{\mathbb{R}}$ qui à $(x_n)_{n\geq 0}$ associe

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}} \left|\sum_{k=0}^{+\infty} a_{n+k}e^{2i\pi x_{n+k}}\binom{n+k}{k}r^k\right|^{1/n},$$

on a

$$\begin{aligned} E(r) &= \left\{\psi((X_n)_{n\geq 0}) < \frac{1}{1-r}\right\} \\ \text{et} \quad E(re^{i\theta}) &= \left\{\psi((X_n+n\theta))_{n\geq 0}) < \frac{1}{1-r}\right\}. \end{aligned}$$

Posons $Y_n = \{X_n + n\theta\}$. On a $e^{2i\pi(X_n+n\theta)} = e^{2i\pi Y_n}$, donc

$$E(re^{i\theta}) = \left\{\psi((Y_n)_{n\geq 0}) < \frac{1}{1-r}\right\}.$$

Or d'après le résultat de l'exercice 35, Y_n suit, tout comme X_n, la loi uniforme sur $[0,1]$. Ainsi les suites $(X_n)_{n\geq 0}$ et $(Y_n)_{n\geq 0}$ suivent chacune la loi $\mathcal{U}([0,1])^{\otimes\mathbb{N}}$ (voir par exemple le corollaire 5.7.5). Par suite, $\psi((X_n)_{n\geq 0}))$ et $\psi((Y_n)_{n\geq 0})$ ont même loi, d'où $\mathbb{P}(E(r)) = \mathbb{P}(E(re^{i\theta}))$, ce qui est le résultat voulu.

3. Raisonnons par l'absurde et supposons que $\mathbb{P}(A_r \neq \varnothing) > 0$. D'après la première question, il existe $r_0 \in [0,1[\cap\mathbb{Q}$ et $\theta_0 \in [0,1]\cap\mathbb{Q}$ tels que $\mathbb{P}(E(r_0e^{2i\pi\theta_0})) > 0$. Par construction, quel que soit θ, les points de $B(r_0e^{i\theta}, \psi((X_n+n\theta)_{n\geq 0})^{-1})$ sont des points réguliers. Mais la loi 0–1 de Kolmogorov nous dit que la variable $\psi((X_n+n\theta)_{n\geq 0})$ est déterministe, et l'argument de la question précédente nous dit que la valeur de cette variable ne dépend pas de θ. Soit ℓ cette valeur. On a donc $\ell < \frac{1}{1-r_0}$ et
$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{\theta\in[0,1]\cap\mathbb{Q}} \{\psi((X_n+n\theta)_{n\geq 0}) = \ell\}\right) = 1.$$
Ainsi, avec probabilité 1, les points de $\bigcup_{\theta\in[0,1]\cap\mathbb{Q}} B(r_0e^{i\theta}, \ell^{-1})$ sont réguliers, en particulier tous les points du cercle unité sont réguliers, ce qui est impossible d'après le résultat d'analyse que nous avons rappelé.