contre $H_1 : \pi_I \neq \pi_{II}$ (test bilatéral).

	Groupe I	Groupe II	Total
- de 50 ans	30 (45)	420 (405)	450
+ de 50 ans	70 (55)	480 (495)	550
Total	100	900	1000

Les conditions d'application sont vérifiées : les effectifs calculés (entre parenthèses) sont supérieurs à 5. On calcule alors la valeur de la statistique

$$\chi^2 = \frac{(30-45)^2}{45} + \cdots + \frac{(480-495)^2}{495} = 10,1.$$

On compare cette valeur à celle d'une loi de χ^2 à 1 degré de liberté, au risque de 5% : $\chi_0^2 = 3,84$.
On trouve $\chi^2 \geq 3,84$: on rejette l'hypothèse H_0 au risque 5%, le pourcentage de patients de plus de 50 ans est significativement différent chez les hypertendus que chez les non hypertendus.

Solution 104 D'après le théorème des trois séries, les deux conditions sont nécessaires. Pour montrer qu'elles sont suffisantes, il suffit de montrer que la série de terme général $\mathrm{Var}(X_n \, \mathbb{1}_{\{X_n \leq c\}})$ converge. On pourra alors appliquer le théorème des trois séries, dans le sens de la réciproque cette fois. Or on a

$$\mathrm{Var}(X_n \, \mathbb{1}_{\{X_n \leq c\}}) = \mathbb{E}[(X_n \, \mathbb{1}_{\{X_n \leq c\}})^2] - (\mathbb{E}[X_n \, \mathbb{1}_{\{X_n \leq c\}}])^2 \leq \mathbb{E}[(X_n \, \mathbb{1}_{\{X_n \leq c\}})^2].$$

Comme X_n est positive, on a aussi $(X_n \, \mathbb{1}_{\{X_n \leq c\}})^2 = X_n^2 \, \mathbb{1}_{\{X_n \leq c\}} \leq cX_n \, \mathbb{1}_{\{X_n \leq c\}}$, d'où

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{Var}(X_n \, \mathbb{1}_{\{X_n \leq c\}}) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} c\mathbb{E}[X_n \, \mathbb{1}_{\{X_n \leq c\}}] = c \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{E}(X_n \mathbb{1}_{\{X_n \leq c\}}) < +\infty.$$

Solution 105 1. On procède par récurrence sur n. Pour $n = 1$, σ_1 est toujours l'application identité, ce qui montre la propriété pour $n = 1$. Soit $\gamma \in \mathfrak{S}_{n+1}$. On doit montrer que $\mathbb{P}(\sigma_{n+1} = \gamma) = \frac{1}{(n+1)!}$. On a

$$\begin{aligned} \sigma_{n+1} = \gamma \quad & \iff \quad \sigma_n \circ (n+1 \ X_{n+1}) = \gamma \\ & \iff \quad \sigma_n = \gamma \circ (n+1 \ X_{n+1}) \quad \text{car } (n+1 \ X_{n+1})^2 = \mathrm{Id} \\ & \iff \quad X_{n+1} = \gamma^{-1}(n+1) \ \text{ et } \sigma_n = \gamma \circ (n+1 \ \gamma^{-1}(n+1)). \end{aligned}$$

Comme σ_n est $\sigma(X_1, \ldots, X_n)$-mesurable, on a alors, par hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\sigma_{n+1} = \gamma) & = \mathbb{P}(X_{n+1} = \gamma^{-1}(n+1)) \mathbb{P}(\sigma_n = \gamma \circ (n+1 \ \gamma^{-1}(n+1))) \\ & = \frac{1}{n+1} \frac{1}{n!} = \frac{1}{(n+1)!} \end{aligned}$$