3. On sait que la fonction $f(\theta) = e^{-|\theta|^\alpha}$ est continue en 0. Le résultat découle alors du théorème de continuité de Lévy.
4. On sait que la transformée de Fourier de la mesure m_α est $e^{-|\theta|^\alpha}$. Les variables X_k étant indépendantes, on a

$$\mathbb{E}\exp\{i\lambda_n\theta(X_1+\cdots+X_n)\} = \prod_{k=1}^n \mathbb{E}e^{i\lambda_n\theta X_k} = \prod_{k=1}^n e^{-|\theta\lambda_n|^\alpha} = e^{-|\theta|^\alpha\lambda_n^\alpha n}.$$

Choisissant λ_n tel que $\lambda_n^\alpha n = 1$, c'est-à-dire $\lambda_n = n^{-1/\alpha}$, on en déduit que $\lambda_n(X_1+\cdots+X_n)$ suit la loi m_α, puisque la transformée de Fourier caractérise la loi.

Solution 95 1. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $A > 0$ tel que $\mathbb{P}(|X| \geq A) \leq \varepsilon/2$. D'après le théorème de Portmanteau, on a

$$\varlimsup_{n\to+\infty} \mathbb{P}(|X_n| \geq A) \leq \mathbb{P}(|X| \geq A) \leq \varepsilon/2,$$

donc il existe n_0 tel que $\mathbb{P}(|X_n| \geq A) \leq \varepsilon$ pour $n \geq n_0$. On a ainsi $\mathbb{P}_{X_n}([-A,A]) \geq 1-\varepsilon$. Comme la famille finie $(X_i)_{1\leq i<n_0}$ est tendue, il existe $A' \geq A$ tel que $\mathbb{P}_{X_i}([-A',A']) \geq 1-\varepsilon$ pour tout $i \in \{1,\dots,n_0-1\}$. On a ainsi $\mathbb{P}_{X_i}([-A',A']) \geq 1-\varepsilon$ pour tout $i \geq 1$: $(X_n)_{n\geq 1}$ est tendue.

2. Soit $\varepsilon > 0$. D'après la question précédente, il existe A tel que $\mathbb{P}(|X_n| > A) \leq \varepsilon/4$ pour tout $n \geq 1$.
Comme $|e^{ixs} - e^{ixt}| \leq \min(|s-t||x|, 2)$, on obtient

$$|e^{iX_ns}-e^{iX_nt}| \leq |s-t||X_n|\,\mathbb{1}_{\{|X_n|\leq A\}}+2\,\mathbb{1}_{\{|X_n|>A\}} \leq A|s-t|+2\,\mathbb{1}_{\{|X_n|>A\}},$$

d'où

$$\begin{aligned} |\phi_{X_n}(s)-\phi_{X_n}(s)| &= |\mathbb{E}[e^{iX_ns}-e^{iX_nt}]| \leq \mathbb{E}[|e^{iX_ns}-e^{iX_nt}|] \\ &\leq A|s-t|+2\mathbb{P}(|X_n|>A). \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\forall n \geq 1, \quad \forall (s,t) \in \mathbb{R}^2, \quad |s-t| \leq \frac{\varepsilon}{2A} \Longrightarrow |\phi_{X_n}(s)-\phi_{X_n}(t)| \leq \varepsilon,$$

ce qui est le résultat voulu.

Solution 96 Posons $Y = r\frac{X}{\|X\|}$. Comme X est gaussien centré, de matrice de covariance Id_n, OX suit la loi gaussienne $\mathcal{N}(0, O\mathrm{Id}_nO^*)$. Comme $OO^* = \mathrm{Id}_n$, X et OX ont même loi. On en déduit que $r\frac{X}{\|X\|_2}$ et $r\frac{OX}{\|OX\|_2}$ ont même loi. Cependant, $r\frac{OX}{\|OX\|_2} = r\frac{OX}{\|X\|_2} = OY$, donc Y et OY ont même loi, ce qui est le résultat voulu.