a de même en faisant le changement de variable $y = (1+u)x$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}e^{-uX} &= \int_{\mathbb{R}} e^{-ux} f_X(x)\ \lambda(dx) = \frac{1}{\Gamma(n+1)} \int_0^{+\infty} e^{-ux} x^n e^{-x}\ dx \\
&= \frac{1}{\Gamma(n+1)} \int_0^{+\infty} e^{-y} \left(\frac{y}{1+u}\right)^n \frac{dy}{u+1} \\
&= \frac{\Gamma(n+1)}{(u+1)^{n+1}} \frac{1}{\Gamma(n+1)} = (u+1)^{-(n+1)}.
\end{aligned}$$

On conclut donc que S_n suit la loi $\Gamma(n+1,1)$. Par ailleurs, pour $x \in \mathbb{R}$:

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n - n}{\sqrt{n}} \le x\right) = \mathbb{P}(S_n \le n + x\sqrt{n}).$$

Exprimant la densité de $\frac{S_n-n}{\sqrt{n}}$ en fonction de celle de S_n, on obtient

$$\begin{aligned}
f_{\frac{S_n-n}{\sqrt{n}}}(x) &= \sqrt{n} f_{S_n}(n + x\sqrt{n}) \\
&= \sqrt{n}\frac{1}{\Gamma(n+1)}(n+x\sqrt{n})^n e^{-(n+x\sqrt{n})}\ \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(n+x\sqrt{n}) \\
&= \frac{\sqrt{n}}{\Gamma(n+1)} n^n (1 + x/\sqrt{n})^n e^{-(n+x\sqrt{n})}\ \mathbb{1}_{[-\sqrt{n},+\infty[}(x),
\end{aligned}$$

ce qui donne le résultat voulu par identification des fonctions h_n et a_n.

4. Comme $\frac{S_n-n}{\sqrt{n}}$ converge en loi vers la variable gaussienne standard N, on sait par définition de g_n que lorsque n tend vers l'infini,

$$\int_0^1 g_n(x)\, dx = \mathbb{P}\left(\frac{S_n - n}{\sqrt{n}} \in [0,1]\right) \underset{n\to+\infty}{\to} \mathbb{P}(N \in [0,1]) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2/2}\, dx}{\sqrt{2\pi}}.$$

5. Remarquons que

$$\left(1 + \frac{x}{\sqrt{n}}\right)^n = \exp\left\{n \log(1 + x/\sqrt{n})\right\} = \exp\left\{n\left(\frac{x}{\sqrt{n}} - \frac{x^2}{2n}\right) + o(1)\right\}.$$

Ainsi, h_n converge ponctuellement vers $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$. De plus, pour n suffisamment grand, h_n est dominée par $h(x) = e^{-x^2/3}$, qui est une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$. Ainsi, on conclut par le théorème de convergence dominée. Autre solution :
On peut noter que $h_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathbb{1}_{]-1,+\infty[}(\frac{x}{\sqrt{n}})\exp(-x^2\psi(\frac{x}{\sqrt{n}}))$ avec, pour $x > -1$, $\psi(x) = \frac{x-\log(1+x)}{x^2}$. Un développement limité donne classiquement $\lim_{x\to 0}\psi(x) = \frac{1}{2}$, donc h_n converge ponctuellement vers $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$. De plus, comme $\psi(x) \ge 0$ pour tout $x > -1$, h_n est dominée par $h(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$. Ainsi, on conclut par le théorème de convergence dominée.