Solution 83 1. Par définition de la partie fractionnaire, il est immédiat que la suite des X_i^g prend ses valeurs dans $[0,1[$. Comme $0 \le gX_i^g < g$, il est également clair que A_i^g prend ses valeurs dans $\{0,\dots,g-1\}$. On a $gX_i = \lfloor gX_i \rfloor + \{gX_i\}$, soit $gX_i = A_i + X_{i+1}$, ou encore $\frac{X_i}{g^i} = \frac{A_i}{g^{i+1}} + \frac{X_{i+1}}{g^{i+1}}$. Ainsi

$$\sum_{i=j}^{n} \frac{A_i}{g^{i+1}} = \sum_{i=j}^{n} \left(\frac{X_i}{g^i} - \frac{X_{i+1}}{g^{i+1}} \right) = \frac{X_j}{g^j} - \frac{X_{n+1}}{g^{n+1}}.$$

Soit en faisant tendre n vers l'infini : $\frac{X_j}{g^j} = \sum_{i=j}^{+\infty} \frac{A_i}{g^{i+1}}$. En particulier, pour $j=0$, on obtient l'écriture voulue. Reste à voir que A_i ne peut être constamment égal à $j-1$ à partir d'un certain rang. En effet, si on avait $A_i = g-1$ pour $i > j$, on aurait $X_j = g^j \sum_{i=j}^{+\infty} \frac{g-1}{g^{i+1}} = 1$, ce qui est exclu, car $X_j \in [0,1[$. On a donc l'existence de la décomposition. Passons à l'unicité. Supposons qu'on ait deux écritures propres distinctes :

$$\omega = \sum_{i=1}^{+\infty} a_i g^{-i} = \sum_{i=1}^{+\infty} b_i g^{-i}.$$

Soit i_0 le plus petit entier tel que $a_i \neq b_i$: on a $\sum_{i=i_0}^{+\infty} a_i g^{-i} = \sum_{i=i_0}^{+\infty} b_i g^{-i}$. On peut supposer que $b_i < a_i$. On a alors

$$\begin{aligned} \frac{a_{i_0}}{g^{i_0}} \le \sum_{i=i_0}^{+\infty} a_i g^{-i} = \sum_{i=i_0}^{+\infty} b_i g^{-i} &= \frac{b_{i_0}}{g^{i_0+1}} + \sum_{i=i_0+1}^{+\infty} b_i g^{-i} \\ &< \frac{b_{i_0}}{g^{i_0}} + \sum_{i=i_0+1}^{+\infty} (g-1) g^{-i}, \end{aligned}$$

où l'inégalité stricte vient du fait qu'au moins un des b_i est strictement inférieur à $g-1$. On a alors $\frac{a_{i_0}}{g^{i_0}} < \frac{b_{i_0}+1}{g^{i_0}}$, soit $a_{i_0} \le b_{i_0}$: contradiction.

2. Note : dans la suite, comme g est le plus souvent fixé, on omet l'exposant g afin de simplifier les écritures.
On a $\{G(X_0) \in \{k\} \times [0,x]\} = \{gX_0 \in [k, k+x]\} = \{X_0 \in [\frac{k}{g}, \frac{k}{g} + \frac{x}{g}]\}$, donc $\mathbb{P}(G(X_0) \in \{k\} \times [0,x]\}) = \mathbb{P}(X_0 \in [\frac{k}{g}, \frac{k}{g} + \frac{x}{g}]) = \frac{x}{g}$. Par addition, on en déduit que pour tout $k \in \{0, \dots g-1\}$, on a

$$\mathbb{P}(G(X_0) \in [0,k[\times [0,x]) = \frac{k}{g} x,$$

soit

$$\mathbb{P}_G([0,k[\times [0,x]) = (\mathcal{U}(\{0,\dots,g-1\}) \otimes \mathbb{P})([0,k[\times [0,x]).$$