Ainsi $D\Psi(u,s) = \begin{pmatrix} s & 0 & \dots & 0 & u_1 \\ 0 & s & \dots & 0 & u_2 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & 0 & s & u_{n-1} \\ -s & -s & & -s & (1-\sum u_i) \end{pmatrix}$.

Pour calculer le déterminant Jacobien $J = \det(D\Psi(u,s))$ il suffit d'ajouter chacune des $n-1$ premières lignes à la dernière ligne de $D\Psi(u,s)$. Ainsi

$$J = \begin{vmatrix} s & 0 & \dots & 0 & u_1 \\ 0 & s & \dots & 0 & u_2 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & 0 & s & u_{n-1} \\ 0 & 0 & & 0 & 1 \end{vmatrix} = s^{n-1}.$$

Par application de la formule du changement de variables, la densité de (U, S_n) est égale à

$$e^{-s}s^{n-1}\mathbb{1}_V.$$

Le vecteur $U = (U_1, \dots, U_n)$ suit donc une loi uniforme sur l'ensemble

$$\Sigma^{n-1} = \{u = (u_1, \dots, u_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1} : u_i > 0 \text{ pour tout } i, \sum_{i=1}^{n-1} u_i < 1\}.$$

Soit

$$\Delta^{n-1} = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i > 0 \text{ pour tout } i, \sum_{i=1}^{n} x_i = 1\}.$$

Le vecteur $(U_1, \dots, U_n)$ est l'image du vecteur $(U_1, \dots, U_{n-1})$ par la projection

$$P : \Sigma \to \Delta,\ (u_1, \dots, u_{n-1}) \mapsto \left(u_1, \dots, u_{n-1}, 1 - \sum_{i=1}^{n-1} u_i\right).$$

La loi de $(U_1, \dots, U_n)$ est donc la loi uniforme sur Δ.

2. Identifions T à Δ^2, et a, b, c aux points $(1,0,0), (0,1,0)$ et $(0,0,1)$. Alors, pour $V = (U_1, U_2, U_3) \in \Delta^2$ la surface du triangle (a, b, V) est proportionnelle au déterminant $\det(a, b, V) = U_3$. Si V suit une loi uniforme sur T, la loi du rapport de cette surface à la surface de T est égale à la loi de la variable $U_3 = X_1/(X_1 + X_2 + X_3)$ où X_1, X_2, X_3 sont des variables indépendantes identiquement distribuées de loi exponentielle.