L'application $x \mapsto c_x$ est injective, à valeurs dans $[-M, M]^d \cap K\ell\mathbb{Z}^d$, dont le cardinal est majoré par $(2M/(K\ell) + 1)^d$, donc

$$|A| \leq (2M/(K\ell) + 1)^d.$$

— Si M n'est pas borné, le résultat est faux. En effet, il suffit de considérer $\mathbb{R}^d$, qui est la réunion des boules $B(2^{-n}x_0, n)$ où n décrit $\mathbb{N}$ et x_0 est un élément non nul quelconque de $\mathbb{R}^d$.

B.2.2 Inégalité maximale de Hardy–Littlewood

À toute fonction intégrable au sens de Lebesgue, $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, on peut associer la fonction maximale de Hardy–Littlewood $Mf : \mathbb{R}^d \to \overline{\mathbb{R}}_+$ définie par

$$Mf(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{\lambda\left(B(x,r)\right)} \int_{B(x,r)} |f(t)| \, d\lambda(t). \tag{B.2}$$

Théorème B.2.2. *Pour toute fonction $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et tout $\eta > 0$, on a*

$$\lambda\left(\{Mf > \eta\}\right) \leq \frac{5^d ||f||_1}{\eta}.$$

Démonstration. Par définition de la borne supérieure, si $Mf(x) > \eta$, il existe $r_x > 0$ tel que $\int_{B(x,r_x)} |f| \, d\lambda > \eta\lambda(B(x, r_x))$.

Soit $K > 0$. On a évidemment

$$B(0, K) \cap \{Mf > \eta\} \subset \bigcup_{\substack{x : x \in B(0,K),\\ Mf(x) > \eta}} B(x, r_x).$$

Comme $B(0, K) \cap \{Mf(x) > \eta\}$ est borné, on peut considérer la famille associée à cette famille de boules par le lemme de Vitali. Comme la famille des boules $(B(y, r_y))_{y \in Y}$ est disjointe et dénombrable, on a

$$\int |f| \, d\lambda \geq \sum_{y \in Y} \int_{B(y,r_y)} |f| \, d\lambda \geq \sum_{y \in Y} \eta\lambda(B(y, r_y)),$$

d'après la propriété définissant les r_x. D'autre part

$$\sum_{y \in Y} \eta\lambda(B(y, r_y)) = \sum_{y \in Y} \frac{1}{5^d} \eta\lambda(B(y, 5r_y)) \geq \frac{\eta}{5^d} \lambda\left(\cup_{y \in Y} B(y, 5r_y) \right).$$

Mais

$$\cup_{y \in Y} B(y, 5r_y) \supset B(0, K) \cap \{Mf > \eta\},$$