donc grâce à l'indépendance des A_j : Sinon

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\bigcap_{j\in J} B_j\right) &= \left(\prod_{j\in J\setminus\{i_0\}} \mathbb{P}(A_j)\right) - \left(\prod_{j\in J} \mathbb{P}(A_j)\right) \\
&= \left(\prod_{j\in J\setminus\{i_0\}} \mathbb{P}(A_j)\right)(1-\mathbb{P}(A_{j_0})) \\
&= \prod_{j\in J} \mathbb{P}(B_j),
\end{aligned}$$

ce qui est le résultat voulu.

Solution 19 1. Soit A un réel quelconque. Comme la série harmonique diverge, il existe un entier n tel que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geq A$.

Pour tout $s > 1$ $\zeta(s) \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^s}$, donc

$$\varliminf_{s\to 1^+} \zeta(s) \geq \varliminf_{s\to 1^+} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^s} = \lim_{s\to 1^+} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^s} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geq A.$$

Comme A peut être pris arbitrairement grand, $\varliminf_{s\to 1^+} \zeta(s) \geq +\infty$, d'où le résultat voulu.

2. Notons que $p\mathbb{N}^* = \bigcup_{k=1}^{+\infty} \{pk\}$. Bien sûr, la réunion est disjointe, donc

$$\begin{aligned}
\mu_s(p\mathbb{N}^*) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mu_s(\{kp\}) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\zeta(s)} \frac{1}{(kp)^s} \\
&= \frac{1}{\zeta(s)} \frac{1}{p^s} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{p^s} = \frac{1}{\zeta(s)} \frac{1}{p^s} \zeta(s) = \frac{1}{p^s}.
\end{aligned}$$

En prenant $p = 1$, on a $\mu_s(\mathbb{N}^*) = 1$ et μ_s est bien une mesure de probabilité.

3. $\bigcap_{k=1}^{+\infty} A_k^c$ est l'ensemble des entiers naturels non nuls qui ne sont multiples d'aucun nombre premier, autrement dit qui ne sont divisibles par aucun nombre premier. Or 1 est le seul entier naturel qui n'ait pas de facteur premier, d'où l'identité $\{1\} = \bigcap_{k=1}^{+\infty} A_k^c$. Posons $B_n = \bigcap_{k=1}^{n} A_k^c$. La suite $(B_n)_{n\geq 1}$ est décroissante et son intersection vaut $\bigcap_{n=1}^{+\infty} B_n = \bigcap_{k=1}^{+\infty} A_k^c = \{1\}$. Ainsi, d'après le théorème de continuité