Ainsi tout élément de $\mathcal{F}$ s'écrit sous la forme $A_K = \underset{k\in K}{\cup} \Omega_k$, où K est une partie de J. Réciproquement, il est facile de voir que tout élément de cette forme est dans la tribu engendrée par les Ω_j, puisque la réunion est finie ou dénombrable.

(c) Bien sûr, $\Omega_{i_0} \in \mathcal{G}$. Soit $A \in \mathcal{G}$ tel que $x \in A$. Comme $A \in \mathcal{G} \subset \mathcal{T}$, on a $A\cap\Omega_{i_0} = \varnothing$ ou $A\cap\Omega_{i_0} = \Omega_{i_0}$. Mais $x \in A\cap\Omega_{i_0}$, donc $A\cap\Omega_{i_0} \neq \varnothing$. On conclut donc que $A \cap \Omega_{i_0} = \Omega_{i_0}$, soit $\Omega_{i_0} \subset A$.

3. $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est la tribu engendrée par les intervalles de $\mathbb{R}$ de la forme $]a, b[$ avec a, b rationnels, qui forment donc une famille dénombrable. Supposons que $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ soit engendrée par une partition dénombrable $(\Omega_j)_{j\in J}$. Soit x réel : d'après la question précédente, l'élément de la partition contenant x est le plus petit élément de $\mathcal{G} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ contenant x : c'est donc $\{x\}$. Ainsi, l'application qui à x associe la partition le contenant est injective. On a ainsi créé une injection de $\mathbb{R}$ dans J qui est dénombrable : contradiction.

Solution 11 Si la suite $(f_n(x))_n$ n'est pas de Cauchy, cela signifie qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $N \geq 0$, il existe $n, m \geq N$ tels que $|f_n(x) - f_m(x)| \geq \varepsilon$. On a ainsi :

$$\begin{aligned} A &= \{x \in X : f_n(x) \text{ n'est pas de Cauchy}\} \\ &= \{x \in X : \exists\varepsilon > 0; \forall N \in \mathbb{N}, \exists n, m \geq N; |f_n(x) - f_m(x)| \geq \varepsilon\} \\ &= \bigcup_{p\in\mathbb{N}^*} \bigcap_{N\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\geq N} \bigcup_{m\geq N} \left\{x \in X : |f_n(x) - f_m(x)| \geq \frac{1}{p}\right\}. \end{aligned}$$

Pour f et g mesurables, $f - g$ est mesurable et $|f - g|$ aussi car, en posant $h(x) = |x|$, on a $|f - g| = h \circ (f - g)$ et la fonction valeur absolue est continue, donc mesurable. On en déduit que $\{x \in X : |f_n(x) - f_m(x)| \geq \frac{1}{p}\}$ est mesurable et donc A est mesurable.

Solution 12 1. Notons S' l'image de S par $s \mapsto \{s\}$.
Si x s'écrit $x = q + s$ avec $(q, s) \in \mathbb{Q} \times S$, on a $x = q + s = q + \lfloor s\rfloor + \{s\}$: on a bien $q + \lfloor s\rfloor \in \mathbb{Q}$ et $\{s\} \in S'$, ce qui donne l'existence de la décomposition voulue. Si $x = q_1' + s_1' = q_2' + s_2'$ avec q_1', q_2' dans $\mathbb{Q}$ et s_1', s_2' dans S', il existe s_1, s_2 avec $\{s_1\} = s_1'$ et $\{s_2\} = s_2'$. On a

$$\{s_2\} - \{s_1\} = s_2' - s_1' = q_1' - q_2' \in \mathbb{Q},$$

donc $s_2 - s_1 \in \mathbb{Q} \cap S = \{0\}$, d'où $s_1' = s_2'$ et $q_1' = q_2'$.

2. On raisonne par l'absurde. Considérons la réunion

$$U = \underset{q'\in\mathbb{Q}\cap[0,1]}{\cup} (q' + S') \subset [0, 1] + [0, 1[= [0, 2[.$$