Pour voir que $\mathcal{A}$ n'est pas une tribu, il suffit de poser $A_i = \{2i\}$. On remarque alors que $\underset{i\geq 1}{\cup} A_i$ est l'ensemble des entiers pairs positifs, qui n'est pas fini, non plus que son complémentaire.

2. Soit $\mathcal{A} = \{A \subset \mathbb{R} : \; A$ ou A^c est fini$\}$. On fait de même que précédemment et on obtient le même résultat (et le même contre-exemple convient).

Solution 7 1. - La tribu engendrée par les intervalles $[a, b]$ est incluse dans la tribu borélienne car tout fermé est un borélien.
Réciproquement, comme $]a, b[= \overset{+\infty}{\underset{n=1}{\cup}} [a+1/n, b-1/n]$, la tribu engendrée par les intervalles $[a', b']$ avec a', b' rationnels contient les ensembles de la forme $]a, b[$, avec a et b dans $\mathbb{Q}$, donc la tribu borélienne.
- Les intervalles semi-ouverts $[a, b[$ sont des boréliens car $[a, b[=]-\infty, b[\setminus]-\infty, a[$ et tous les ouverts sont des boréliens. Réciproquement, on a comme précédemment $]a, b[= \overset{+\infty}{\underset{n=1}{\cup}}]a, b-1/n]$.
- Les demi-droites fermées sont fermées, donc boréliennes. On a également $[a, b[= [a, +\infty[\setminus[b, +\infty[$. Or les ensembles de la forme $[a, b[$ engendrent la tribu borélienne, d'où le résultat.

2. Les ouverts et les fermés étant des boréliens, les tribus respectivement engendrées par les boules ouvertes et les pavés sont des sous-tribus de la tribu borélienne. Voyons qu'elles coïncident avec la tribu borélienne.
   — La tribu engendrée par les pavés fermés contient les pavés ouverts : en effet $]a, b[\times]c, d[= \overset{+\infty}{\underset{n=1}{\cup}} [a+1/n, b-1/n] \times [c+1/n, d-1/n]$, donc elle contient la tribu borélienne qui est engendrée par les pavés ouverts.
   — Chaque rectangle ouvert est intersection de quatre demi-plans ouverts. Donc pour montrer que la tribu engendrée par les boules contient les pavés, il suffit de montrer qu'elle contient les demi-plans ouverts de frontière parallèle aux axes principaux. On a par exemple
$$]a, +\infty[\times\mathbb{R} = \overset{+\infty}{\underset{n=1}{\cup}} B((a+n, 0), n).$$
   Les trois autres types de demi-plans se traitent de la même manière.

Solution 8 1. Comme $\mathcal{A}$ est une tribu, elle est stable par réunion dénombrable et par intersection dénombrable. On en déduit ainsi que
$$\underline{\lim}_{n\to+\infty} A_n = \overset{+\infty}{\underset{n=1}{\cup}} \overset{+\infty}{\underset{m=n}{\cap}} A_m \quad \text{et} \quad \overline{\lim}_{n\to+\infty} A_n = \overset{+\infty}{\underset{n=1}{\cap}} \overset{+\infty}{\underset{m=n}{\cup}} A_m$$