A.3.4 Lemme des bergers

Le lemme suivant peut également être utile

Lemme A.3.3 (des bergers)**.** *Soit ϕ une application* surjective *de D dans A. On suppose qu'il existe un entier $a \geq 1$ tel que*

$$\forall y \in A \quad |\phi^{-1}(\{y\})| = |\{x \in D; \phi(x) = y\}| = a$$

(autrement dit si tout élément de A admet exactement a antécédents), on a

$$|A| = \frac{|D|}{a}.$$

Démonstration. On applique le principe de partition avec $I = A$. Si l'on pose, pour $y \in A$, $D_y = \{x \in D; \phi(x) = y\}$, les D_y forment clairement une partition de D, d'où

$$|D| = \sum_{y \in A} |D_y| = \sum_{y \in A} a = |A|a.$$

□

Le nom du lemme est dû à la procédure prétendument employée par les bergers chaldéens pour compter le nombre de leurs moutons : il s'agit de compter le nombre de pattes et de diviser par 4. Dans cet exemple, A est l'ensemble des moutons, D l'ensemble des pattes de mouton, et ϕ l'application qui à une patte associe le mouton auquel elle appartient.

A.4 Quelques résultats incontournables

A.4.1 Nombre d'applications de D dans A

Il existe exactement $|A|^{|D|}$ applications de D dans A, ce qui peut s'écrire

$$|A^D| = |A|^{|D|}.$$

On pose $|A| = n$ et $|D| = p$. Un cas particulier important est celui où l'on a $D = \{1, \ldots, p\}$. Or, un p-uplet $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ dont les composantes sont des éléments de A peut être considéré comme la donnée d'une application de $\{1, \ldots, p\}$ dans A. Le nombre de p-uplets $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ dont les composantes sont des éléments de A est donc n^p.

Exemple. Un professeur note chaque étudiant d'une classe de 30 étudiants par une note entière de 0 à 20. Le nombre de résultats possibles est le nombre de fonctions de l'ensemble D des étudiants dans l'ensemble $A = \{0, \ldots, 20\}$ des notes possibles. Comme $|A| = 21$ et $|D| = 30$, il y a donc 21^{30} résultats possibles.

Remarque. Au lycée, vous avez vu ce résultat sous la dénomination "choix indépendant (avec remise) de p objets dans un ensemble de cardinal $|A| = n$."