Calcul des coefficients du multinôme

Pour calculer $\binom{n}{a_1,a_2,\dots,a_m}$, considérons l'application de $\Psi^n(a_1,\dots,a_m)$ dans $\Psi^n(a_1,\dots,a_{m-2},a_{m-1}+a_m)$ qui à ϕ associe la fonction $\phi'=\phi\wedge(m-1)$: on remplace chaque occurence de m par $m-1$.
L'image réciproque de $\phi'\in\Psi^n(a_1,\dots,a_{m-2},a_{m-1}+a_m)$ est formée des fonctions ϕ qui coïncident avec ϕ' pour les x tels que $\phi'(x)<m-1$, et qui valent $m-1$ ou m pour les points x tels que $\phi'(x)=m-1$, avec la condition supplémentaire que parmi ces $a_{m-1}+a_m$ points, il doit y en avoir a_{m-1} tels que $\phi(x)=m-1$ et a_m tels que $\phi(x)=m$. Il est aisé de voir qu'il y a $\binom{a_m+a_{m-1}}{a_m}$ telles fonctions. Le lemme des bergers nous dit alors que

$$\binom{n}{a_1,a_2,\dots,a_m}=\binom{a_m+a_{m-1}}{a_m}\binom{n}{a_1,a_2,\dots,a_{m-2},a_{m-1}+a_m}.$$

On peut remarquer que $\binom{a_m+a_{m-1}}{a_m}=\binom{a_m+a_{m-1}}{a_{m-1},a_m}=\frac{(a_m+a_{m-1})!}{a_{m-1}!a_m!}$. On établit alors aisément par récurrence sur m que

$$\binom{n}{a_1,a_2,\dots,a_m}=\frac{n!}{a_1!a_2!\dots a_m!}.$$

A.8 Exercices

1. Combien existe-t-il de mots de n lettres construits avec l'alphabet $\{a;b\}$ et ne comportant pas deux "a" consécutifs ?
   Indication : montrer que si u_n est le nombre de tels mots se terminant par "a" et v_n est le nombre de tels mots se terminant par "b", on a la récurrence
   $$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}.$$
2. On donne un ensemble Ω de 15 entiers compris entre 1000 et 2000. Montrer que l'on peut en extraire deux sous-ensembles disjoints non-vides A et B tels que la somme des éléments de A soit égale à la somme des éléments de B. Indication : montrer que l'application de $\mathcal{P}(\Omega)$ dans $\mathbb{N}$ qui à A associe $\sum\limits_{x\in A} x$ n'est pas injective.
   Raffiner le raisonnement pour montrer que si l'on remplace 15 par 14, le résultat est encore vrai. Indication : remplacer $\mathcal{P}(\Omega)$ par $\bigcup\limits_{i=5}^{8}\mathcal{B}_i(\Omega)$.
3. On considère l'ensemble Ω des suites de n chiffres (les chiffres sont pris dans $\{0,1,\dots,9\}$). Combien vaut $|\Omega|$? Combien y-a-il de chiffres comportant un nombre pair de zéros ?