2. Il est évident que h est à la fois à valeurs positives et croissante. Montrons la convexité de h. Soit $\lambda \in [0,1]$. On suppose que $x \geq y$, que les suites d'entiers $(n_k),(p_k)$ tendent vers l'infini et que $\frac{n_k}{n_k+p_k}$ tend vers λ par valeurs supérieures. On a alors comme précédemment
$$\begin{aligned} & -\frac{\log \mathbb{P}(S_{n_k+p_k} \geq (n_k+p_k)(\lambda x + (1-\lambda)y))}{n_k+p_k} \\ \leq & -\frac{\log \mathbb{P}(S_{n_k+p_k} \geq (n_k+p_k)(\frac{n_k}{n_k+p_k}x + \frac{p_k}{n_k+p_k}y))}{n_k+p_k} \\ \leq & \frac{n_k}{n_k+p_k}\left(-\frac{1}{n_k}\log \mathbb{P}(S_{n_k} \geq n_k x)\right) \\ & + \frac{p_k}{n_k+p_k}\left(-\frac{1}{p_k}\log \mathbb{P}(S_{p_k} \geq p_k y)\right) \end{aligned}$$
En faisant tendre k vers l'infini, on obtient
$$h(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda h(x) + (1-\lambda)h(y).$$

3. Si $\mathbb{P}(X_1 \geq x) = 0$, alors $\mathbb{P}(S_n \geq nx) = 0$ pour tout n et donc $h(x) = +\infty$. Réciproquement, le premier point implique que $\log \mathbb{P}(X_1 \geq x) \leq -h(x)$ et donc si $h(x) = +\infty$, alors $\mathbb{P}(X_1 \geq x) = 0$.

□

Afin d'expliciter la limite h dans la proposition précédente, nous avons besoin d'une notation supplémentaire.

Définition. Soit X une variable aléatoire de loi de probabilité μ sur $\mathbb{R}$. On appelle cumulant de μ la fonction
$$\Lambda_\mu : \mathbb{R} \to (-\infty,+\infty],\ \lambda \mapsto \log \mathbb{E}[e^{\lambda X}],$$
avec la convention $\log(+\infty) = +\infty$.

Remarque. Λ_μ est une fonction convexe. Soient $x,y \in \mathbb{R}$ et $0 < \theta < 1$. En appliquant l'inégalité de Hölder avec $p = \frac{1}{\theta}$ et $q = \frac{1}{1-\theta}$, on a
$$\begin{aligned} \Lambda_\mu(\theta x + (1-\theta)y) &= \log \mathbb{E}[\exp(\theta x + (1-\theta)y)X] \\ &= \log \mathbb{E}[\exp(\theta x X)\exp((1-\theta)yX)] \\ &\leq \log\left((\mathbb{E}\exp(xX))^\theta (\mathbb{E}\exp(yX))^{1-\theta}\right) \\ &= \theta\Lambda_\mu(x) + (1-\theta)\Lambda_\mu(y). \end{aligned}$$

À toute fonction convexe f, on peut associer sa transformée de Fenchel–Legendre f^*. Celle-ci est définie par
$$f^*(x) = \sup_{\lambda \in \mathbb{R}}(\lambda x - f(\lambda)).$$