espérance et même variance que $\frac{X_{n,k}}{\sigma_n}$, soit $\psi_{n,k}(t) = \exp(-\frac{t^2}{2}\frac{\operatorname{Var} X_{n,k}}{\sigma_n^2})$. On a

$$\prod_{k=1}^{N_n} \phi_{n,k}(t) - \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) = \prod_{k=1}^{N_n} \phi_{n,k}(t) - \prod_{k=1}^{N_n} \psi_{n,k}(t)$$

car $\frac{1}{\sigma_n^2}\sum_{k=1}^{N_n} \operatorname{Var} X_{n,k} = 1$. On va maintenant procéder comme dans la preuve du théorème central limite : la différence de deux produits de nombres complexes, dont les modules ne dépassent pas 1, n'excède pas la somme des différences [1], d'où

$$\left|\prod_{k=1}^{N_n} \phi_{n,k}(t) - \exp(-\frac{t^2}{2})\right| \leq \sum_{k=1}^{N_n} |\phi_{n,k}(t) - \psi_{n,k}(t)|.$$

Soit α un réel positif [2] tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |e^{ix} - (1 + ix - x^2/2)| \leq \alpha \min(x^2, |x|^3).$$

Appliquons cette inégalité à $x = \frac{tX_{n,k}}{\sigma_n}$, puis prenons l'espérance. On obtient alors que

$$\left|\phi_{n,k}(t) - \left(1 - \frac{1}{2}t^2\frac{\operatorname{Var} X_{n,k}}{\sigma_n^2}\right)\right| \leq \alpha \mathbb{E}Y,$$

où

$$Y = \min\left(t^2\left(\frac{X_{n,k}}{\sigma_n}\right)^2, t^3\left(\frac{|X_{n,k}|}{\sigma_n}\right)^3\right).$$

On peut écrire :

$$\mathbb{E}Y = \mathbb{E}\left[Y\ \mathbb{1}_{\{|X_{n,k}|/\sigma_n < \varepsilon\}}\right] + \mathbb{E}\left[Y\ \mathbb{1}_{\{|X_{n,k}|/\sigma_n \geq \varepsilon\}}\right].$$

Lorsque $\frac{|X_{n,k}|}{\sigma_n}$ est petit, on a intérêt à l'élever à une plus grande puissance, donc on écrit :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}Y &\leq |t|^3\mathbb{E}\left[\frac{|X_{n,k}|^3}{\sigma_n^3}\ \mathbb{1}_{\left\{\frac{|X_{n,k}|}{\sigma_n} < \varepsilon\right\}}\right] + t^2\mathbb{E}\left[X_{n,k}^2\frac{1}{\sigma_n^2}\ \mathbb{1}_{\left\{\frac{|X_{n,k}|}{\sigma_n} \geq \varepsilon\right\}}\right] \\ &\leq \varepsilon|t|^3\frac{\operatorname{Var} X_{n,k}}{\sigma_n^2} + t^2\frac{1}{\sigma_n^2}\mathbb{E}\left[X_{n,k}^2\ \mathbb{1}_{\{|X_{n,k}| \geq \varepsilon\sigma_n\}}\right].\end{aligned}$$

Ainsi

$$\sum_{k=1}^{N_n}\left|\phi_{n,k}(t) - \left(1 - \frac{1}{2}t^2\frac{\operatorname{Var} X_{n,k}}{\sigma_n^2}\right)\right| \leq \alpha\varepsilon|t|^3 + \alpha t^2\sum_{k=1}^{N_n}\frac{1}{\sigma_n^2}\mathbb{E}\left[X_{n,k}^2\ \mathbb{1}_{\{|X_{n,k}| \geq \varepsilon\sigma_n\}}\right].$$

1. Lorsqu'il n'y a que deux termes, la preuve résulte de l'identité $zu - z'u' = z(u - u') + u'(z - z')$; dans le cas général, on procède par récurrence.

2. Vérifier l'existence...