Alors,

$$\lim_{n\to+\infty} \|F_n - F\|_\infty = 0 \ \mathbb{P} - p.s.$$

Démonstration. Commençons d'abord par expliquer comment on peut, en pratique, calculer la quantité $\|F_n - F\|_\infty$. Cela assurera en particulier la mesurabilité de $\|F_n - F\|_\infty$.

Réordonnons les nombres $X_1, \dots, X_n$ en $X^{(1)}, X^{(2)}, \dots, X^{(n)}$ avec $X^{(1)} \le X^{(2)} \le \dots \le X^{(n)}$ (c'est ce que l'on appelle une statistique d'ordre). Les fonctions ainsi définies sont bien des variables aléatoires puisque l'on a l'identité

$$\{X^{(k)} \le t\} = \left\{\sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{[0,t]}(X_i) \ge k\right\}.$$

Pour $0 \le k \le n$, la fonction $F_n - F$ vaut $\frac{k}{n} - F(t)$ sur $[X^{(k)}, X^{(k+1)}[$, avec la convention $X^{(0)} = -\infty$ et $X^{(n+1)} = +\infty$. Comme $F_n - F$ est décroissante et continue à droite sur $[X^{(k)}, X^{(k+1)}[$, on a

$$\sup_{t\in[X^{(k)},X^{(k+1)}[} \left|\frac{k}{n} - F(t)\right| = \max\left(\left|\frac{k}{n} - F(X^{(k)})\right|, \left|\frac{k}{n} - F(X^{(k+1)}-0)\right|\right).$$

Ici, $F(x-0)$ désigne la limite de F en x à gauche. Comme F_n et F ont les mêmes limites en $-\infty$ et en $+\infty$, on a simplement

$$\|F_n - F\|_\infty = \max\left(\max_{1\le k\le n}\left|\frac{k}{n} - F(X^{(k)})\right|, \max_{1\le k\le n}\left|\frac{k-1}{n} - F(X^{(k)}-0)\right|\right),$$

ce qui montre que $\|F_n - F\|_\infty$ est bien mesurable. On peut aller plus loin : le même raisonnement que ci-dessus montre que l'application

$$\psi_n : (x_1, \dots, x_n) \mapsto \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|F(x) - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{]-\infty,x]}(x_k)\right|.$$

est $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)) - (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mesurable et on a $\|F_n - F\|_\infty = \psi_n(X_1, \dots, X_n)$. Ainsi $\mathbb{P}(\|F_n - F\|_\infty \to 0) = \mathbb{P}_X(\psi_n(\Pi_1, \dots, \Pi_n) \to 0)$: ainsi le résultat recherché ($\mathbb{P}(\|F_n - F\|_\infty \to 0) = 1$) est une propriété de la loi du processus $(X_n)_{n\ge1}$: pour montrer que le théorème est vrai, on peut donc choisir les X_n sur l'espace de notre choix, pourvu qu'elles forment une suite de variables aléatoires identiquement distribuées de loi μ.

Soit donc $(U_n)_{n\ge1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $[0, 1]$. D'après le théorème 5.6.1, les variables aléatoires $X_k = Q^*(U_k)$, avec $Q^*(u) = \inf\{x \in \mathbb{R}; 1 - F(x) \le u\}$ forment un échantillon de la loi μ. On a

$$\begin{aligned}
\|F_n - F\|_\infty &= \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{]-\infty,x]}(X_k) - F(x)\right| \\
&= \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{]-\infty,x]}(Q^*(U_k)) - F(x)\right| \\
&= \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{]-\infty,F(x)]}(1-U_k) - F(x)\right| \\
&\leq \sup_{y\in[0,1]} \left| \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{]-\infty,y]}(U'_k) - y\right|,
\end{aligned}$$

où on a posé $U'_k = 1 - U_k$. Les U'_k sont encore des variables indépendantes suivant la loi uniforme sur $[0,1]$. Notons que la dernière inégalité est en réalité une égalité lorsque F est continue. Ce résultat sera réutilisé plus tard.

Ainsi on est ramené à étudier le cas où μ est la loi uniforme sur $[0,1]$, puisque $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{]-\infty,y]}(U'_k)$ est la fonction de répartition empirique associée à l'échantillon $U'_1, \dots, U'_n$. Notons donc maintenant $F_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{]-\infty,y]}(U_k)$. Par la loi des grands nombres, on sait que pour tout réel x, la fonction de répartition empirique $F_n(x)$ converge presque sûrement vers $F(x) = x$.

On reconnait ici les conditions d'applications du théorème 1.5.2 de Dini–Polyà : la convergence simple d'une suite de fonctions croissantes d'un intervalle $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ vers une fonction continue sur $[a,b]$ entraîne la convergence uniforme, ce qui achève la preuve. □

Remarque. Si on veut utiliser la convergence pour un seul x ou pour un ensemble dénombrable de valeurs de x, il n'est pas nécessaire d'invoquer Glivenko-Cantelli : la loi forte des grands nombres suffit.

Remarque. L'identité

$$\{X^{(k)} \leq t\} = \left\{\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{[0,t]}(X_i) \geq k\right\},$$

établie au cours de la preuve, permet également de calculer la loi de la statistique d'ordre : comme les événements $\{X_i \leq t\}$ sont indépendants et de même probabilité $F(t)$, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X^{(k)} \leq t) &= \mathcal{B}(n, F(t))([k, +\infty[) \\
&= \sum_{i=k}^{n} \binom{n}{i} F(t)^i (1-F(t))^{n-i}.
\end{aligned}$$

Dans le cas où les X_k suivent la loi uniforme sur $[0,1]$, il n'est pas très difficile, en dérivant la fonction de répartition, de vérifier que $X^{(k)}$ suit la loi Beta de paramètres k et $n+1-k$ (exercice laissé au lecteur).