où v est le vecteur unitaire $(\sqrt{\nu_1}, \dots, \sqrt{\nu_q})$: $\mathrm{Id}_q - C$ est le projecteur orthogonal sur l'espace vectoriel engendré par v, et donc C le projecteur orthogonal sur $v^\perp$. Ainsi, d'après le thèorème de Cochran, $T = \| \operatorname{diag}(\frac{1}{\sqrt{\nu_1}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{\nu_q}})U\|_2^2$ suit la loi du χ^2 à $q-1$ degrés de libertés. □

12.9 Exercices sur les vecteurs gaussiens

12.9.1 Exercices corrigés

Exercice 96. Soit X un vecteur aléatoire suivant la loi $\mathcal{N}(0, \mathrm{Id}_n)$. Pour $r > 0$, on note H_r^{n-1} la loi de $r\frac{X}{\|X\|_2}$. Soit O une matrice orthogonale. Montrer que H_r^{n-1} est invariante par O. On admettra dans la suite que H_r^{n-1} est l'unique mesure à support sur la sphère de rayon r et invariante par l'action du groupe orthogonal.

Exercice 97. Soit $S_a^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \ : ||x|| = a\}$ la sphère de rayon a plongée dans $\mathbb{R}^n$ où

$$||x|| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}.$$

Soient μ_n la probabilité uniforme sur $S_{\sqrt{n}}^{n-1}$ (autrement dit $\mu_n = H_{\sqrt{n}}^{n-1}$), $\pi_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ la projection définie par $\pi_n(x) = x_1$ et γ_n la mesure image de μ_n par π_n. Ainsi, pour tout $a < b \in \mathbb{R}$,

$$\gamma_n([a,b]) = \mu_n(\pi_n^{-1}([a,b])) = \mu_n\left(\{x \in S_{\sqrt{n}}^{n-1} : a \le x_1 \le b\}\right).$$

Démontrer, en utilisant l'exercice 96 le résultat suivant (Lemme de Poincaré) :

Pour toute fonction $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue bornée,

$$\lim_{n \to +\infty} \int \Phi(x)\gamma_n(dx) = \int \Phi(x)\gamma(x)\ dx = \int \Phi(x)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}\ dx.$$

Exercice 98. Soit $(X, Y) \sim \mathcal{N}(0,\ \mathrm{Id}_2)$. Montrer que XY a même loi que la variable $\frac{1}{2}(X^2 - Y^2)$. Indication : penser à la formule de polarisation

$$XY = \frac{1}{4}\left((X+Y)^2 - (X-Y)^2\right).$$

Exercice 99. *Comparaisons stochastiques.*

1. Soient μ et ν deux lois sur $\mathbb{R}$. On dit que μ domine stochastiquement ν et on écrit $\mu \succeq \nu$ si pour tout fonction f mesurable positive croissante, on a $\mathbb{E}f(X) \le \mathbb{E}f(Y)$. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :