— Pour voir que (3) $\iff$ (4), il suffit de remarquer que

$$\begin{aligned}
& \sup_{O \textbf{ ouvert}} \left(\mu(O) - \varliminf_{n\to+\infty} \mu_n(O)\right) \\
= & \sup_{F \textbf{ fermé}} \left((\mu(F^c) - \varliminf_{n\to+\infty} \mu_n(F^c)\right) \\
= & \sup_{F \textbf{ fermé}} \left(1 - \mu(F) - \varliminf_{n\to+\infty} (1 - \mu_n(F))\right) \\
= & \sup_{F \textbf{ fermé}} \left(-\mu(F) - \varliminf_{n\to+\infty} - \mu_n(F)\right) \\
= & \sup_{F \textbf{ fermé}} \left(-\mu(F) + \varlimsup_{n\to+\infty} \mu_n(F)\right).
\end{aligned}$$

Ainsi, si l'un des supremum est négatif, alors l'autre l'est aussi.

— Preuve de (2) $\Longrightarrow$ (3). Soit F un fermé de $\mathbb{R}^d$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, on pose $d_F(x) = d(x, F) = \inf(\|y - x\| : y \in F)$ et, pour $\varepsilon > 0$, G_ε est la fonction continue ~~par morceaux~~ définie sur $\mathbb{R}$ par $G_\varepsilon(x) = \left(1 - \frac{|x|}{\varepsilon}\right)^+$. On a $G_\varepsilon \circ d_F \ge \mathbb{1}_F$, donc

$$\varlimsup_{n\to+\infty} \int G_\varepsilon \circ d_F \; d\mu_n \ge \varlimsup_{n\to+\infty} \int \mathbb{1}_F \; d\mu_n.$$

Comme $G_\varepsilon \circ d_F$ est uniformément continue (c'est la composée d'une application 1-lipschitzienne et d'une application $\frac{1}{\varepsilon}$-lipschitzienne), on a

$$\varlimsup_{n\to+\infty} \int G_\varepsilon \circ d_F \; d\mu_n = \int G_\varepsilon \circ d_F \; d\mu,$$

d'où

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \int G_\varepsilon \circ d_F \; d\mu \ge \varlimsup_{n\to+\infty} \mu_n(F).$$

Or par définition de la mesure image, on a $\int G_\varepsilon \circ d_F \; d\mu = \int G_\varepsilon \; d\mu_{d_F}$. Lorsque ε tend vers 0, G_ε converge vers l'indicatrice de 0 et donc par convergence dominée, $\int G_\varepsilon \circ d_F \; d\mu = \int G_\varepsilon \; d\mu_{d_F}$ converge vers

$$\int \mathbb{1}_{\{0\}} \; d\mu_{d_F} = \mu_{d_F}(\{0\}) = \mu(d_F = 0) = \mu(F).$$

— Preuve de $(3, 4) \Longrightarrow 5$. On a $\mathring{A} \subset A \subset \overline{A}$, d'où

$$\begin{aligned}
& \varlimsup_{n\to+\infty} \mu_n(A) \le \varlimsup_{n\to+\infty} \mu_n(\overline{A}) \le \mu(\overline{A}), \\
\text{et} \quad & \varliminf_{n\to+\infty} \mu_n(A) \ge \varliminf_{n\to+\infty} \mu_n(\mathring{A}) \ge \mu(\mathring{A}).
\end{aligned}$$