2. Soient $N$ une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda$ et $(X_i)_{i\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes identiquement distribuées de loi de Bernoulli de paramètre $p$, cette suite étant aussi indépendante de $N$. Montrer que $S = X_1 + X_2 + \cdots + X_N$ suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda p$.

3. (a) Soit $K$ un vecteur aléatoire $n$-dimensionnel dont les composantes sont indépendantes et suivent la loi de Poisson de paramètre $\lambda$. Soit $L$ un vecteur aléatoire $n$-dimensionnel dont les composantes sont indépendantes et suivent la loi de Bernoulli de paramètre $p$. On suppose que $K$ et $L$ sont indépendants. Déterminer la fonction génératrice de $\langle K, L\rangle$.

   (b) On suppose que, pour tout $k \geq 0$, $X_k$ suit une loi de Poisson de paramètre $k\lambda$. Soit $T$ une variable aléatoire indépendante de la suite $(X_k)_{k\geq 0}$ et suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$. Déterminer la fonction génératrice de $X_T$.

   (c) En déduire que $\langle K, L\rangle$ suit la même loi que $X_T$.

4. Un joueur joue à pile ou face avec $n \geq 2$ pièces équilibrées de la manière suivante. Il lance simultanément ces $n$ pièces. S'il n'obtient aucun pile, son gain est nul et la partie s'arrête. S'il obtient au moins un pile, il relance la première pièce autant de fois qu'il a obtenu de piles à la première phase du jeu et gagne autant d'unités que le nombre de piles obtenus lors de cette deuxième série de lancers. On note $X_1$ le nombre de piles obtenus à la première étape, et $X_2$ le gain du joueur.

   (a) Déterminer la fonction génératrice de $X_2$.

   (b) En déduire que

$$\forall k \in \{0,\ldots,n\}, \quad \mathbb{P}(X_2 = k) = \binom{n}{k}\frac{1}{3^k}\left(\frac{3}{4}\right)^n.$$

5. Montrer que la convolée de deux lois de Cauchy est une loi de Cauchy.

6. Donner un exemple de variable aléatoire $X$ telle que $(\phi_X)^2 = \phi_{2X}$. En déduire que la propriété

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \phi_{X+Y}(t) = \phi_X(t)\phi_Y(t)$$

   n'implique PAS que $X$ et $Y$ sont indépendantes.

7. Soit $X \sim \mathcal{N}(0,1)$. Montrer que $\forall n \geq 0, \quad \mathbb{E}X^{2n} = \frac{(2n)!}{n!2^n}$.

8. Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires admettant chacune un moment d'ordre 3. On pose $\phi(x,y) = \mathbb{E}\exp(i(xX+yY))$. Montrer que $X^2Y$ est intégrable. Quelle est la régularité de $\phi$ ? Exprimer $\mathbb{E}X^2Y$ en fonction de $\phi$.