Dans le cas de la marche symétrique sur $\mathbb{Z}$ (c'est-à-dire $\mu = \frac{1}{2}(\delta_1 + \delta_{-1})$), le calcul de $\mathbb{P}(S_n = 0)$ est très simple : cette probabilité est nulle aux instants impairs (parité), et aux temps pairs, on a

$$\mathbb{P}(S_{2n} = 0) = \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n}.$$

Une manière élégante de justifier l'égalité peut être de remarquer que comme $\frac{1+X_1}{2}$ suit la loi de Bernoulli de paramètre 1, $B_n = \frac{n+S_n}{2}$ suit la loi Binomiale de paramètres n et $1/2$: ainsi $\mathbb{P}(S_{2n} = 0) = \mathbb{P}(B_{2n} = n)$.

On peut alors donner un équivalent de $\mathbb{P}(S_{2n} = 0)$ grâce à la formule de Stirling : $n\,! \sim \sqrt{2\pi n}\ (\frac{n}{e})^n$, d'où l'on tire $\mathbb{P}(S_{2n} = 0) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$, ce qui donne la divergence de la série.

On peut remarquer qu'en fait, on n'a pas vraiment besoin de la formule de Stirling, mais seulement de la partie "équivalent de Wallis" de la preuve. Cela est détaillé dans l'exercice 75.

Pour étudier des cas plus généraux, on va commencer par donner une formule explicite permettant de retrouver la loi d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{Z}^d$ à partir de sa fonction caractéristique.

Lemme 9.4.2. *Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{Z}^d$, de fonction caractéristique ϕ_X. On a*

$$\forall n \in \mathbb{Z}^d \quad \mathbb{P}(X = n) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi,\pi]^d} \phi_X(t) e^{-i\langle n,t\rangle}\ d\lambda^{\otimes d}(t).$$

Démonstration. Notons m la loi uniforme sur $[-\pi, \pi]^d$.
La fonction $(\theta, x) \mapsto e^{i\langle\theta, x-n\rangle}$ est bornée, donc intégrable par rapport à $m \otimes \mathbb{P}_X$. Or $m \otimes \mathbb{P}_X$ est une mesure de probabilité sur $[-\pi, \pi]^d \times \mathbb{R}^d$ et comme la fonction $(\theta, x) \mapsto e^{i\theta x}$ est bornée (par 1), elle est intégrable par rapport à $m \otimes \mathbb{P}_X$. Par le théorème de Fubini, on a, d'une part

$$\begin{aligned}\int_{[-\pi,\pi]^d \times \mathbb{R}^d} e^{i\langle\theta,x-n\rangle}\ d(m \otimes \mathbb{P}_X)(\theta, x) &= \int_{[-\pi,\pi]^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle\theta,x-n\rangle}\ d\mathbb{P}_X(x) \right)\ dm(\theta) \\ &= \int_{[-\pi,\pi]^d} \mathbb{E}[e^{i\langle\theta,X-n\rangle}]\ dm(\theta),\end{aligned}$$

et d'autre part

$$\int_{[-\pi,\pi]^d \times \mathbb{R}^d} e^{i\langle\theta,x-n\rangle}\ d(m \otimes \mathbb{P}_X)(\theta, x) = \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{[-\pi,\pi]^d} e^{i\langle\theta,x-n\rangle}\ dm(\theta) \right)\ d\mathbb{P}_X(x).$$

Or, pour $k \in \mathbb{Z}^d$, $k = (k_1, \ldots, k_d)$ et $n = (n_1, \ldots, n_d)$, on a

$$\int_{[-\pi,\pi]^d} e^{i\langle\theta,k-n\rangle}\ dm(\theta) = \prod_{p=1}^{d} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\theta(k_p-n_p)}\ d\theta = \prod_{p=1}^{d} \delta_{n_p,k_p} = \mathbb{1}_{\{n\}}(k).$$

Comme $\mathbb{P}_X$-presque tout réel est entier, on a alors

$$\begin{aligned}\int_{[-\pi,\pi]^d\times\mathbb{R}^d} e^{i\langle\theta,x-n\rangle}\, d(m\otimes\mathbb{P}_X)(\theta,x) &= \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{\{n\}}(x)\, d\mathbb{P}_X(x)\\ &= \mathbb{P}_X(\{n\}) = \mathbb{P}(X=n).\end{aligned}$$

□

Théorème 9.4.3 (Chung et Fuchs)**.** *La marche aléatoire est transiente si et seulement si la fonction caractéristique ϕ de X_1 vérifie*

$$\lim_{r\to 1^-} \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{[-\pi,\pi]^d} Re\left(\frac{1}{1-r\phi(t)}\right)\, d\lambda^{\otimes d}(t) < +\infty.$$

Démonstration. Posons, pour $r<1$, $\mathcal{S}_r = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{1}_{\{S_n=0\}} r^n$ et $S = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{1}_{\{S_n=0\}}$. On a vu que $\mathbb{E}[S] = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(S_n=0)$, et, comme $S = \lim_{r\to 1^-} \mathcal{S}_r$, le théorème de convergence monotone nous dit que $\mathbb{E}[S] = \lim_{r\to 1^-} \mathbb{E}[\mathcal{S}_r]$.

Soit N un entier naturel. Comme $\mathcal{S}_r = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} \mathbb{1}_{\{S_n=0\}} r^n$, le théorème de convergence monotone implique que

$$\mathbb{E}[\mathcal{S}_r] = \lim_{N\to+\infty} \mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{N} \mathbb{1}_{\{S_n=0\}} r^n\right] = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} r^n \mathbb{P}(S_n=0).$$

Or

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S_n=0) &= \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{[-\pi,\pi]^d} \phi_{S_n}(t)\, d\lambda^{\otimes d}(t)\\ &= \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{[-\pi,\pi]^d} \phi(t)^n\, d\lambda^{\otimes d}(t), \qquad (9.5)\end{aligned}$$

donc on obtient

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N} r^n\mathbb{P}(S_n=0) &= \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{[-\pi,\pi]^d} \sum_{n=0}^{N} (r\phi(t))^n\, d\lambda^{\otimes d}(t)\\ &= \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{[-\pi,\pi]^d} \frac{1-(r\phi(t))^{N+1}}{1-r\phi(t)}\, d\lambda^{\otimes d}(t).\end{aligned}$$

En appliquant le théorème de convergence dominée, on obtient alors

$$\mathbb{E}[\mathcal{S}_r] = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{[-\pi,\pi]^d} \frac{1}{1-r\phi(t)}\, d\lambda^{\otimes d}(t).$$

Comme $\mathcal{S}_r$ est réel, $\mathbb{E}[\mathcal{S}_r]$ est réel, et donc

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\mathcal{S}_r] &= \mathrm{Re}\ \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{[-\pi,\pi]^d}\frac{1}{1-r\phi(t)}\ d\lambda^{\otimes d}(t)\\ &= \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{[-\pi,\pi]^d}\mathrm{Re}\ \frac{1}{1-r\phi(t)}\ d\lambda^{\otimes d}(t).\end{aligned}$$

On conclut en faisant tendre r vers 1^- et en utilisant le théorème 9.4.1. □

Corollaire 9.4.4. *Si*

$$\int_{[-\pi,\pi]^d} Re\ \frac{1}{1-\phi(t)}\ d\lambda^{\otimes d}(t) = +\infty,$$

alors la marche est récurrente.

Démonstration. En effet, grâce au lemme de Fatou, on a

$$+\infty = \int_{[-\pi,\pi]^d}\mathrm{Re}\ \frac{1}{1-\phi(t)}\ d\lambda^{\otimes d}(t) \le \varliminf_{r\to 1^-}\ \int_{[-\pi,\pi]^d}\mathrm{Re}\ \frac{1}{1-r\phi(t)}\ d\lambda^{\otimes d}(t),$$

et on applique le critère de Chung et Fuchs. □

Théorème 9.4.5. *Si $\frac{1}{1-\phi}$ est intégrable sur $[-\pi,\pi]^d$, alors la marche aléatoire est transiente.*

Démonstration. Grâce à (9.5), on a

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N}\mathbb{P}(S_n=0) &= \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{[-\pi,\pi]^d}\sum_{n=0}^{N}\phi(t)^n\ d\lambda^{\otimes d}(t)\\ &= \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{[-\pi,\pi]^d}\frac{1-\phi(t)^{N+1}}{1-\phi(t)}\ d\lambda^{\otimes d}(t).\end{aligned}$$

Comme $\left|\frac{1-\phi(t)^{N+1}}{1-\phi(t)}\right| \le \frac{2}{|1-\phi(t)|}$, on a l'inégalité

$$\sum_{n=0}^{N}\mathbb{P}(S_n=0) \le \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{[-\pi,\pi]^d}\frac{2}{|1-\phi(t)|}\ d\lambda^{\otimes d}(t).$$

Ceci entraîne la convergence de la série de terme général positif $\mathbb{P}(S_n=0)$ et on applique le théorème 9.4.1. □

9.4.2 Marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}^d$

L'exemple le plus classique est celui où μ est la mesure uniforme sur $\{x \in \mathbb{Z}^d; \|x\|_1 = 1\}$. On l'appelle la marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}^d$.

Théorème 9.4.6 (Pólya, 1921)**.** *La marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}^d$ est récurrente pour $d = 1, 2$, et transiente si $d \geq 3$.*

Démonstration. On a aisément $\phi(\theta) = \frac{1}{d} \sum_{k=1}^{d} \cos\theta_k$ et un développement limité montre que

$$1 - \phi(\theta_1, \ldots, \theta_d) = \frac{1}{2d}\|\theta\|^2 + o(\|\theta\|_2^2).$$

On obtient ainsi que l'intégrale $\int_{[-\pi,\pi[^d} \frac{1}{1-\phi(\theta)}\, d\lambda^{\otimes d}(\theta)$ a même nature que $\int_{[-\pi,\pi[^d} \frac{1}{\|\theta\|_2^2}\, d\theta_1 \ldots d\theta_d$ ou que $\int_{B(0,1)} \frac{1}{\|\theta\|_2^2}\, d\theta_1 \ldots d\theta_d$.

Il reste à voir la nature de l'intégrale $\int_{B(0,1)} \frac{1}{\|\theta\|_2^2}\, d\theta_1 \ldots d\theta_d$, qui est aisément déterminée grâce au théorème 4.12.9 d'intégration des fonctions radiales. □

Remarque. Il est possible, dans ce cas particulier, d'étudier la nature de la série de terme général $\mathbb{P}(S_n = 0)$ en utilisant seulement des estimées sur des coefficients binomiaux, voir par exemple l'ouvrage de Lesigne [22].

Ci-dessous, une simulation des 1500 premiers pas d'une marche aléatoire symétrique aux plus proches voisins en dimension 2 :

