Pour z réel, on a

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \exp(-x^2/2) \exp(zx)\ d\lambda(x) \\
= & \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \exp(-((x-z)^2 - z^2)/2)\ d\lambda(x) \\
= & \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \exp(-(x-z)^2/2)\ d\lambda(x) \exp\left(\frac{z^2}{2}\right) \\
= & \exp\left(\frac{z^2}{2}\right),
\end{aligned}$$

car l'expression intégrée n'est autre que la densité de la loi $\mathcal{N}(z,1)$. Mais si deux fonctions holomorphes coïncident sur $\mathbb{R}$, elles coïncident sur $\mathbb{C}$. On a donc

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \exp(-x^2/2) \exp(zx)\ d\lambda(x) = \exp\left(\frac{z^2}{2}\right).$$

On particularise alors z en it, t étant réel, et on obtient

$$\phi_X(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \exp(-x^2/2) \exp(itx)\ dx = \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right).$$

Méthode 2 : utilisation d'une équation différentielle.
On pose $g_t(x) = e^{itx}$. On a $\phi_X(t) = \mathbb{E}[g_t(X)]$. Avec l'aide du théorème de dérivation sous le signe intégrale, on montre facilement que

$$\phi'_X(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \exp(-x^2/2) ix \exp(itx)\ dx = i\mathbb{E}[X g_t(X)].$$

Mais d'après la formule d'intégration par parties de la variable gaussienne (vue au lemme 6.11.1), on a $\mathbb{E}[X g_t(X)] = \mathbb{E}[g'_t(X)]$. Cependant, pour tout x réel, on a $g'_t(x) = itg_t(x)$, d'où

$$\phi'_X(t) = i\mathbb{E}[X g_t(X)] = i\mathbb{E}[g'_t(X)] = i\mathbb{E}[itg_t(X)] = -t\mathbb{E}[g_t(X)] = -t\phi_X(t).$$

L'équation différentielle se résout classiquement.
On pose $F(t) = \exp(t^2/2)\phi_X(t)$. On a $F(0) = 1$ et $F'(t) = 0$, donc F est constante égale à un, ce qui donne $\phi_X(t) = \exp(-t^2/2)$.

Pour passer au cas général, on pose $Y = \sigma X + m$; on a $Y \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$, et alors $\phi_Y(t) = \mathbb{E}e^{itY} = e^{it(\sigma X + m)} = e^{imt}\mathbb{E}e^{it\sigma X} = e^{imt}\phi_X(\sigma t) = e^{imt}e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}}$. $\square$