Exercice 47. Soit X une variable aléatoire de densité $f(x) = \frac{\mathbb{1}_{[0,1]}(x)}{(1+x)\log 2}$. Montrer que $\{\frac{1}{X}\} = \frac{1}{X} - \lfloor \frac{1}{X} \rfloor$ a même loi que X.

Indication : montrer que pour toute fonction H mesurable bornée, on a $\mathbb{E}[H(\{\frac{1}{X}\})] = \mathbb{E}[H(X)]$.

Exercice 48. Soit X une variable aléatoire uniforme sur l'intervalle $[-1, 1]$. Posons $Y = |4X^2 - 1|$. Calculer $\mathbb{E}(Y)$, $\mathbb{E}(X + Y)$, $\mathbb{E}[(Y + 4X^2)^3]$.

Exercice 49.

1. On suppose que $X_1, \dots X_n$ sont des variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $[0, 1]$.
   Calculer $\mathbb{E}(\max\{X_1, \dots, X_n\})$.
2. On suppose que $Y_1, \dots Y_n$ sont des variables aléatoires indépendantes suivant la loi exponentielle de paramètre 1.
   Calculer $\mathbb{E}(\min\{Y_1, \dots, Y_n\})$.

Exercice 50. Une preuve probabiliste d'un théorème d'Erdös.
On dit que $A \subset \mathbb{Z}$ est sans-somme s'il n'existe pas $x, y, z \in A$ avec $x + y = z$

Soit A une partie de $\mathbb{Z}$ non vide ne contenant pas 0. On va montrer qu'il existe $B \subset A$ tel que $|B| > |A|/3$ et B est sans-somme.

1. Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers de la forme $3k+2$. On notera désormais p un nombre premier de la forme $3k + 2$ tel que $A \subset [-p/3, p/3] \backslash \{0\}$.
2. Soit B_0 l'ensemble des classes de $[k + 1, \dots, 2k + 1]$ dans $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Montrer que B_0 est sans-somme.
3. On rappelle que $\mathbb{F}_p$ est un corps : l'ensemble des éléments non nuls de $\mathbb{F}_p$ est aussi l'ensemble des éléments inversibles, noté $\mathbb{F}_p^*$. Soit X suivant la loi uniforme sur $\mathbb{F}_p^*$. Notons A' l'ensemble des classes de A dans $\mathbb{F}_p$. Vérifier que $B' = A' \cap (X.B_0)$ est un ensemble aléatoire sans-somme dont le relèvement B est inclus dans A.
4. Montrer que $\mathbb{E}[|B'|] = |A'|.\frac{k+1}{3k+1} > |A| \times \frac{1}{3}$.
5. En déduire que $\mathbb{P}(|B'| > |A|/3) > 0$.
6. Conclure.

Exercice 51. Combien y a-t-il de nombres à huit chiffres (les chiffres sont pris dans $0, 1, \dots, 9$) dont la somme des chiffres est égale à 40 ?

Indication : si on note A_0 les solutions dans $\mathbb{N}^8$ de $x_1 + \dots + x_8 = 40$ et A_i les éléments de A_0 avec $x_i \geq 10$, on pourra par exemple remarquer que $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_i$ est en bijection avec l'ensemble des solutions de
$y_1 + \dots + y_8 = 40 - 10i$ dans $\mathbb{N}^8$.