et

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X(X-1)] &= \sum_{k=0}^{+\infty} k(k-1)\mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)\mathbb{P}(X=k) \\
&= \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}\lambda^2 \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} \\
&= e^{-\lambda}\lambda^2 e^{\lambda} = \lambda^2.
\end{aligned}$$

On en déduit que $\mathbb{E}[X^2] = \mathbb{E}[X(X-1)] + \mathbb{E}X = \lambda^2 + \lambda$ et

$$\operatorname{Var} X = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}X)^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda.$$

6.10.5 Loi hypergéométrique

On rappelle que la loi hypergéométrique $\mathcal{H}(N, n, k)$ est la loi image de la loi uniforme sur $\Omega = \mathcal{B}_k(\{1, \dots, N\})$ par l'application

$$\begin{aligned}
X : \mathcal{B}_k(\{1, \dots, N\}) &\to \mathbb{N} \\
\omega &\mapsto X(\omega) = |\{1, \dots, n\} \cap \omega|.
\end{aligned}$$

On va montrer que $\mathbb{E}X = k\frac{n}{N}$ et $\operatorname{Var} X = k\frac{n}{N}(1 - \frac{n}{N})\frac{N-k}{N-1}$.

Notons $\mathbb{P}$ la loi uniforme sur Ω. Par souci de lisibilité, on définit l'ensemble aléatoire A par $A(\omega) = \omega$. Ainsi

$$X = |\{1, \dots, n\} \cap A| = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{\{i \in A\}}.$$

Pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, on a

$$\mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{i \in A\}}) = \mathbb{P}(i \in A) = 1 - \frac{\binom{N-1}{k}}{\binom{N}{k}} = 1 - \frac{(N-1)!(N-k)!}{N!(N-k-1)!} = 1 - \frac{N-k}{N} = \frac{k}{N}.$$

On obtient ainsi

$$\mathbb{E}X = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\mathbb{1}_{\{i \in A\}} = \frac{nk}{N} = k\frac{n}{N}.$$

De plus, on a

$$\operatorname{Var} X = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \operatorname{Covar}(\mathbb{1}_{\{i \in A\}}, \mathbb{1}_{\{j \in A\}}).$$

Comme pour $i = j$, on a

$$\operatorname{Covar}(\mathbb{1}_{\{i \in A\}}, \mathbb{1}_{\{j \in A\}}) = \operatorname{Var} \mathbb{1}_{\{i \in A\}} = \mathbb{P}(j \in A)(1 - \mathbb{P}(j \in A)) = \frac{k}{N}(1 - \frac{k}{N}),$$

et pour $i \neq j$, on a

$$\begin{aligned}
\mathrm{Covar}(\mathbb{1}_{\{i\in A\}}, \mathbb{1}_{\{j\in A\}}) &= \mathrm{Covar}(1-\mathbb{1}_{\{i\in A\}}, 1-\mathbb{1}_{\{j\in A\}}) \\
&= \mathrm{Covar}(\mathbb{1}_{\{i\notin A\}}, \mathbb{1}_{\{j\notin A\}}) \\
&= \mathbb{P}(i\notin A, j\notin A) - \mathbb{P}(i\notin A)\mathbb{P}(j\notin A) \\
&= \frac{\binom{N-2}{k}}{\binom{N}{k}} - (\frac{N-k}{N})^2 \\
&= \frac{(N-k)(N-k-1)}{N(N-1)} - (\frac{N-k}{N})^2 \\
&= -\frac{1}{N-1}\frac{k}{N}(1-\frac{k}{N}),
\end{aligned}$$

on en déduit que

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}\, X &= n\times\frac{k}{N}\left(1-\frac{k}{N}\right) + n(n-1)\times\left(-\frac{1}{N-1}\frac{k}{N}(1-\frac{k}{N})\right) \\
&= n\frac{k}{N}\left(1-\frac{k}{N}\right)\left(1-\frac{n-1}{N-1}\right) \\
&= n\frac{k}{N}\left(1-\frac{k}{N}\right)\frac{N-n}{N-1} \\
&= k\frac{n}{N}\left(1-\frac{n}{N}\right)\frac{N-k}{N-1}.
\end{aligned}$$

Remarque. Une variable suivant loi hypergéométrique a la même espérance qu'une loi binomiale $\mathcal{B}(k, \frac{n}{N})$ et sa variance ne diffère de celle de cette binomiale que d'un facteur $\frac{N-k}{N-1}$.

6.11 Calcul des premiers moments des lois à densité usuelles

6.11.1 Loi uniforme sur un segment

Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[-1,1]$. La densité de X est donc

$$x \mapsto \frac{1}{2}\mathbb{1}_{[-1,1]}(x).$$

On a donc

$$\mathbb{E}X = \int_{-1}^{1}\frac{1}{2}x\, dx = 0$$

et

$$\mathbb{E}X^2 = \int_{-1}^{1}\frac{1}{2}x^2\, dx = \frac{1}{3}.$$