Théorème 6.5.6. *Si f est une fonction dérivable sur l'intervalle ouvert I telle que f' est croissante sur I, alors f est convexe sur I.*

Démonstration. Soient $x, y \in I$, avec $x < y$, ainsi que $\theta \in]0,1[$.
On pose $z = \theta x + (1-\theta)y$. En appliquant deux fois l'inégalité des accroissements finis, on a

$$\frac{f(x)-f(z)}{x-z} \leq f'(z) \leq \frac{f(y)-f(z)}{y-z}.$$

En prenant les membres extrémaux de cette inégalité, on a

$$\frac{f(x)-f(z)}{(1-\theta)(x-y)} \leq \frac{f(y)-f(z)}{\theta(y-x)},$$

soit

$$(f(z)-f(x))\theta \leq (1-\theta)(f(y)-f(z)),$$

ce qui donne le résultat voulu en réarrangeant les termes. □

6.5.2 Inégalité de Jensen

Théorème 6.5.7. *Soit X une variable aléatoire intégrable à valeurs dans l'intervalle ouvert I. Soit f une fonction convexe de I dans $\mathbb{R}$. Alors*

$$f(\mathbb{E}X) \leq \mathbb{E}f(X).$$

Notons qu'on n'exclut pas d'avoir $\mathbb{E}[f(X)] = +\infty$.

Démonstration. Soit Φ l'ensemble des fonctions affines ϕ telles que

$$\forall x \in I \quad \phi(x) \leq f(x).$$

Soit $\phi \in \Phi$. On a presque partout

$$\phi(X) \leq f(X).$$

On a donc $\mathbb{E}\phi(X) \leq \mathbb{E}f(X)$. Comme ϕ est une fonction affine, on voit que $\mathbb{E}\phi(X) = \phi(\mathbb{E}X)$. Ainsi,

$$\forall \phi \in \Phi \quad \phi(\mathbb{E}X) \leq \mathbb{E}f(X).$$

donc

$$\sup_{\phi\in\Phi} \phi(\mathbb{E}X) \leq \mathbb{E}f(X).$$

Prenons alors $\phi(t) = f(\mathbb{E}X) + f'_d(\mathbb{E}X)(t - \mathbb{E}X)$. D'après le lemme 6.5.5, $\phi \in \Phi$, ce qui donne

$$f(\mathbb{E}X) \leq \mathbb{E}f(X).$$

□