2. Montrer qu'une variable aléatoire exponentielle est sans mémoire.
3. Montrer qu'une variable aléatoire sans mémoire est distribuée exponentiellement.
   Indication : considérer la fonction g définie par $g(t) = \mathbb{P}(X > t)$ et commencer par exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $g(n)$ et $g(1/n)$ à l'aide de $g(1)$.

5.8.2 Exercices non corrigés

1. Soit $s > 1$. On dit que X suit une loi Zeta de paramètre $s > 1$ si l'on a
   $$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \mathbb{P}(X = n) = \frac{1}{\zeta(s)} \frac{1}{n^s},$$
   où l'on a posé
   $$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}.$$
   Soit X suivant une loi ζ de paramètre s. On tire Y au hasard, c'est-à-dire avec équiprobabilité, entre 1 et X : $\mathbb{P}_{Y|X=x} = \mathcal{U}(\{1, \ldots, x\})$ la loi uniforme sur $\{1, \ldots, x\}$.
   (a) Pour $n, k \in \mathbb{N}^*$, calculer $\mathbb{P}(Y = k|X = n)$.
   (b) On pose $Z = \frac{Y}{X}$. Montrer que la fonction de répartition F_Z est strictement croissante sur $[0, 1]$. Remarquons que cela donne un exemple de variable discrète dont la fonction de répartition est strictement croissante sur son support (il n'y a donc pas de "plateau").
   (c) Soient p, q deux entiers positifs premiers entre eux, avec $p \leq q$. Calculer $\mathbb{P}(Z = \frac{p}{q})$.
   (d) On rappelle que $\phi(n)$ désigne le nombre d'entiers entre 1 et n qui sont premiers avec n. Déduire de ce qui précède une preuve probabiliste de l'identité
   $$\zeta(s+1) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\phi(n)}{n^{s+1}} = \zeta(s).$$
   (e) Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers. Pour $p \in \mathcal{P}$, on note $\nu_p(n)$ le plus grand entier k tel que p^k divise n. Montrer que les variables aléatoires $(1 + \nu_p(X))_{p \in \mathcal{P}}$ sont des variables indépendantes, avec $1 + \nu_p(X) \sim \mathcal{G}(1 - \frac{1}{p^s})$.
   (f) Soient X, X' deux variables aléatoires indépendantes suivant les lois Zeta de paramètres respectifs $s > 1$ et $t > 1$. Montrer que $X \wedge X'$ (p.g.c.d. de X et X') suit la loi Zeta de paramètre $s + t$.
   En déduire que $\mathbb{P}(X \wedge X' = 1) = \frac{1}{\zeta(s+t)}$.