5.5.7 Loi de Poisson

On dit qu'une variable aléatoire X suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ si l'on a

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}.$$

Cela définit bien une loi de probabilité car $e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \geq 0$ et

$$\sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}e^{\lambda} = 1.$$

On la note $\mathcal{P}(\lambda)$.

5.5.8 Loi hypergéométrique

La loi hypergéométrique $\mathcal{H}(N, n, k)$ modélise le phénomène suivant. Soit une population de N individus, composée de deux types distincts (par exemple on a n individus de taille supérieure ou égale à 1,80 m, et $N - n$ individus mesurant moins de 1,80 m). On tire au hasard k individus dans cette population. On compte ensuite le nombre d'individus possédant un certain type (par exemple mesurant plus de 1,80 m).

De manière théorique, cela s'énonce comme suit.

Proposition 5.5.4. *La loi hypergéométrique est la loi image de la loi uniforme sur* $\Omega = \mathcal{B}_k(\{1, \dots, N\})$ *par l'application*

$$\begin{array}{rcl} X : \mathcal{B}_k(\{1, \dots, N\}) & \to & \mathbb{N} \\ \omega & \mapsto & X(\omega) = |\{1, \dots, n\} \cap \omega|. \end{array}$$

Ainsi, pour $i \in \{0, \dots, \min(n, k)\}$*, on a*

$$\mathbb{P}(X = i) = \mathcal{H}(N, n, k)(i) = \frac{\binom{n}{i}\binom{N-n}{k-i}}{\binom{N}{k}}.$$

Démonstration. Notons $\mathbb{P}$ la loi uniforme sur Ω. On a

$$\mathcal{H}(N, n, k)(i) = \mathbb{P}(\omega \in S),$$

où $S = \{\omega \in \mathcal{B}_k(\{1, \dots, N\}); |\{1, \dots, n\} \cap \omega| = i\}$. L'application

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{B}_i(\{1, \dots, n\}) \times \mathcal{B}_{k-i}(\{n+1, \dots, N\}) & \to & S \\ (A, B) & \mapsto & A \cup B \end{array}$$

est une bijection, donc

$$|S| = |\mathcal{B}_i(\{1, \dots, n\}) \times \mathcal{B}_{k-i}(\{n+1, \dots, N\})| = \binom{n}{i}\binom{N-n}{k-i}.$$

Comme $\mathbb{P}$ est la loi uniforme sur Ω, et $|\Omega| = \binom{N}{k}$, le résultat s'ensuit. $\square$