5.5 Variables et lois discrètes classiques

5.5.1 Indicatrice d'un événement

On rappelle que pour $A \subset \Omega$, l'application $\mathbb{1}_A$, appelée indicatrice de A, est définie sur Ω par

$$\mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in A \\ 0 \text{ si } x \notin A. \end{cases}$$

$\mathbb{1}_A$ est une variable aléatoire à valeurs dans $\{0; 1\}$.

5.5.2 Mesure de Dirac

On appelle mesure de Dirac au point $x \in \Omega$ la mesure δ_x définie par

$$\delta_x(A) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in A \\ 0 \text{ si } x \notin A. \end{cases}$$

C'est bien une loi car elle est positive et $\delta_x(\Omega) = 1$.

Remarque.
1. La variable aléatoire constante égale à x suit la loi δ_x. $\mathbb{1}_\Omega$ suit la loi δ_1 tandis que $\mathbb{1}_\varnothing$ suit la loi δ_0.
2. Si Ω est un groupe abélien $\delta_{x+y} = \delta_x * \delta_y = \delta_y * \delta_x$.

5.5.3 Loi de Bernoulli

On appelle loi de Bernoulli de paramètre p la loi $\mu = (1-p)\delta_0 + p\delta_1$.

Ainsi, on dit qu'une variable aléatoire X suit la loi de Bernoulli de paramètre p si on a $\mathbb{P}(X = 1) = p$ et $\mathbb{P}(X = 0) = 1 - p$.

Remarque (importante)**.**
- Pour tout événement A, $\mathbb{1}_A$ suit la loi de Bernoulli de paramètre $\mathbb{P}(A)$.
- Réciproquement, si une variable aléatoire X suit une loi de Bernoulli, elle vérifie $X(\omega) = \mathbb{1}_{X(\omega)=1}$. (Réfléchir un peu…)

Ainsi les variables aléatoires qui suivent des lois de Bernoulli sont exactement les indicatrices d'événements.

5.5.4 Loi uniforme sur un ensemble

Soit $E \subset \Omega$ un ensemble fini. On appelle loi uniforme sur E la loi définie sur $\mathcal{P}(\Omega)$ par

$$\mathcal{P}(\Omega) \to [0, 1], \qquad A \mapsto \frac{|A \cap E|}{|E|}.$$