Exercice : Montrer que si f est la densité d'une loi, alors $\lambda(f<0)=0$.

Évidemment, si f est la densité d'une loi, on a

$$1=\mu(\mathbb{R}^d)=\int_{\mathbb{R}^d} f(\omega)d\lambda(\omega).$$

Réciproquement, si f est une fonction mesurable, positive $\lambda-$presque partout et d'intégrale 1, $\mu=f.\lambda$ est une mesure de probabilité admettant f pour densité. Ainsi, on dit qu'une variable (ou un vecteur) aléatoire X est à densité si sa loi $\mathbb{P}_X$ est à densité.

5.4.1 Premières propriétés

Soit X une variable aléatoire de densité f. La densité f a les propriétés suivantes :

— pour tout $a,b\in\mathbb{R},\quad a\leq b$, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(a\leq X\leq b) &= \mathbb{P}(a\leq X<b)=\mathbb{P}(a<X\leq b)\\ &= \mathbb{P}(a<X<b)=\int_{[a,b]} f(x)\ d\lambda(x).\end{aligned}$$

— $\forall a\in\mathbb{R},\quad \mathbb{P}(a\leq X)=\mathbb{P}(a<X)=\int_{[a,+\infty[} f(x)\ d\lambda(x)=\int_{]a,+\infty[} f(x)\ d\lambda(x).$

— $\forall a\in\mathbb{R},\quad \mathbb{P}(a\geq X)=\mathbb{P}(a>X)=\int_{]-\infty,a]} f(x)\ d\lambda(x)=\int_{]-\infty,a[} f(x)\ d\lambda(x).$

— $\int_{\mathbb{R}} f(x)\ d\lambda(x)=1.$

Remarquons que pour montrer qu'une fonction f positive est une densité de la variable aléatoire X, il suffit de montrer que pour tout x réel, les mesures $d\mathbb{P}_X(x)$ et $f(x)\ d\lambda(x)$ coïncident sur la famille $(]-\infty,a],a\in\mathbb{R})$, car cette famille engendre les boréliens et la mesure $d\mathbb{P}_X(x)$ est une probabilité (et on utilise alors le corollaire 3.4.1).

5.4.2 Densités et lois marginales

Théorème 5.4.1. *Soient $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ et $(\Omega',\mathcal{F}',\mu')$ deux espaces mesurés σ-finis. On suppose que la mesure ν sur $(\Omega\times\Omega',\mathcal{F}\otimes\mathcal{F}')$ admet une densité h par rapport à $\mu\otimes\mu'$. Alors la mesure image ν_π de ν par l'application*

$$\begin{aligned}\pi:\Omega\times\Omega' &\to \Omega\\ (x,x') &\mapsto x\end{aligned}$$

admet comme densité par rapport à μ la fonction $f(x)=\int_{\Omega'} h(x,x')d\mu'(x')$.