Exemple. Si X, Y et Z sont indépendantes, alors $\text{ch}(X), Y^2$ et Z^3 sont indépendantes.

En fait, nous voudrions pouvoir dire aussi que $\text{ch}(X)+Y^2$ est indépendante de Z^3. Pour cela, il faudrait savoir que (X, Y) est indépendant de Z, auquel cas nous pourrions utiliser les fonctions $f(x, y) = \text{ch}\, x + y^2$ et $g(z) = z^3$. Ceci est vrai. En effet, on a le résultat suivant.

5.2.1 Retour sur l'indépendance des tribus

Théorème 5.2.2. *Soit $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ une famille de sous-tribus de $(\Omega, \mathcal{F})$ indépendantes sous $\mathbb{P}$. Soient $J \subset I$ et $K \subset I$ disjoints.*

Alors les tribus $\sigma(\mathcal{A}_j; j \in J)$ et $\sigma(\mathcal{A}_k; k \in K)$ sont indépendantes.

Démonstration. On considère le π-système $\mathcal{C}$ défini par

$$\mathcal{C} = \bigcup_{E\subset J,\ E \text{ fini}} \{ \bigcap_{x\in E} A_x; \forall x \in E \quad A_x \in \mathcal{A}_x\},$$

ainsi que le π-système $\mathcal{D}$ défini par

$$\mathcal{D} = \bigcup_{E\subset K,\ E \text{ fini}} \{ \bigcap_{x\in E} A_x; \forall x \in E \quad A_x \in \mathcal{A}_x\}.$$

Si $B_1 \in \mathcal{C}$, B_1 peut s'écrire sous la forme $B_1 = \bigcap_{x\in E} A_x$, où $E \subset J$ et E fini et où $\forall x \in E$, $A_x \in \mathcal{A}_x$. De même, si $B_2 \in \mathcal{D}$, B_2 peut s'écrire sous la forme $B_2 = \bigcap_{x\in E'} A_x$ où $E' \subset K$ et E' fini et où $\forall x \in E'$, $A_x \in \mathcal{A}_x$. Ainsi

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(B_1 \cap B_2) &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{x\in(E\cup E')} A_x \right) = \prod_{x\in(E\cup E')} \mathbb{P}(A_x) \\ &= \left(\prod_{x\in E} \mathbb{P}(A_x) \right) \left(\prod_{x\in E'} \mathbb{P}(A_x) \right) = \mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}(B_2). \end{aligned}$$

Comme $\mathcal{C}$ est un π-système qui engendre $\sigma(\mathcal{A}_j, j \in J)$ et $\mathcal{D}$ un π-système qui engendre $\sigma(\mathcal{A}_k, k \in K)$, le théorème 3.4.3 permet de conclure. □

Le résultat s'étend aisément au cas de plus de deux familles de tribus.

Corollaire 5.2.3. *Soit $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ une famille de sous-tribus de $(\Omega, \mathcal{F})$ indépendantes sous $\mathbb{P}$. Soient $(I_x)_{x\in K}$ des parties de I deux à deux disjointes. Pour $x \in K$, on note $\mathcal{B}_x$ la tribu engendrée par les $\mathcal{A}_j$, où j décrit I_x. Alors les tribus $(\mathcal{B}_x)_{x\in K}$ sont indépendantes.*

Démonstration. Ainsi qu'on l'a déjà noté, montrer qu'une famille de tribus est indépendantes, c'est montrer que chaque sous-famille finie est indépendante. Ainsi, il suffit de montrer le théorème dans le cas où K est fini, mettons $K = \{0, \dots, n\}$. D'après la remarque faite au chapitre 3, il suffit de montrer que pour tout k entre 1 et n, $\mathcal{B}_k = \sigma(A_j, j \in I_k)$ est indépendant de la tribu engendrée par les $(\mathcal{B}_i)_{0 \le i \le k-1}$, qui est aussi la tribu engendrée par les $\mathcal{A}_j$, pour $j \in \bigcup_{0 \le i < k} I_i$. Or ce dernier point découle directement du théorème 5.2.2, ce qui achève la preuve. □

Corollaire 5.2.4. *Soient $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_n$ des familles de parties mesurables de $(\Omega, \mathcal{F})$. On suppose que les $\mathcal{C}_i$ sont des π-systèmes contenant chacun Ω et que pour tout n-uplet $(A_i)_{1 \le i \le n} \in \bigtimes_{i=1}^{n} \mathcal{C}_i$, on a $\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)$. Alors, les tribus $\sigma(\mathcal{C}_i)$ sont indépendantes.*

Démonstration. Comme précédemment, il suffit de montrer que pour tout k avec $1 \le k \le n$, $\sigma(\mathcal{C}_k)$ est indépendante de la tribu engendrée par les $(\mathcal{C}_i)_{1 \le i < k}$. Or, cette dernière tribu est engendrée par le π-système des éléments qui s'écrivent sous la forme $\bigcap_{i=1}^{k-1} A_i$, avec $(A_i)_{1 \le i \le k-1} \in \bigtimes_{i=1}^{k-1} \mathcal{C}_i$, d'où le résultat avec le théorème 3.4.3. □

5.2.2 Vecteurs aléatoires indépendants

Théorème 5.2.5. *Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $X_1, \dots, X_n$ des vecteurs aléatoires. Les deux propositions suivantes sont équivalentes*

1. *$X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes.*
2. *$\mathbb{P}_{(X_1, \dots, X_n)} = \mathbb{P}_{X_1} \otimes \dots \otimes \mathbb{P}_{X_n}$*

Démonstration. Montrons $1 \Longrightarrow 2$. On pose $\mathcal{C} = \prod_{i=1}^{n} \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n_i})$.
Soit $A = A_1 \times \dots \times A_n \in \mathcal{C}$. On a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{(X_1, \dots, X_n)}(A) &= \mathbb{P}((X_1, \dots, X_n) \in A) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} \{X_i \in A_i\}\right) \\ &= \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i \in A_i) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}_{X_i}(A_i) = (\mathbb{P}_{X_1} \otimes \dots \otimes \mathbb{P}_{X_n})(A). \end{aligned}$$

Ainsi $\mathbb{P}_{(X_1, \dots, X_n)}$ et $\mathbb{P}_{X_1} \otimes \dots \otimes \mathbb{P}_{X_n}$ coïncident sur un π-système qui engendre $\bigotimes_{i=1}^{n} \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n_i})$. Il s'ensuit que ces deux mesures sont égales.

Montrons $2 \Longrightarrow 1$. Soient $B_1, \dots, B_n$ quelconques tels que pour tout i B_i soit $\sigma(X_i)$-mesurable. Alors, pour tout i, il existe un borélien A_i tel que