— Toute fonction croissante admet une limite à gauche en tout point de l'intérieur de son ensemble de définition. On a

$$\begin{aligned} F_X(x) - \lim_{y\to x^-} F_X(y) &= \lim_{n\to+\infty} F_X(x) - F_X(x-1/n) \\ &= \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X \in]x-1/n, x]) = \mathbb{P}(X = x) \end{aligned}$$

d'après le théorème de continuité séquentielle décroissante.

— D'après ce qui précède, les points de discontinuité de F_X sont les points x tels que $\mathbb{P}(X = x) > 0$: il y en a au plus un ensemble dénombrable d'après le théorème 3.1.2.

□

Remarque. On parle de la fonction de répartition d'une variable aléatoire, mais il s'agit en fait de la fonction de répartition de la loi de la variable aléatoire.

Retrouver la loi lorsque la fonction de répartition n'est pas continue

Théorème 5.1.3. *Soit F la fonction de répartition associée à la loi μ. On suppose que F est de classe C^1 par morceaux, avec les points de discontinuité $a_1, \ldots, a_n$. Alors μ se décompose en la somme d'une partie à densité, f qui est la dérivée de F là où F est dérivable, et d'une partie discrète qui est $\nu = \sum_{i=1}^{n} \mu(a_i)\delta_{a_i}$.*

Démonstration. On doit montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$F(t) = \int_{]-\infty,t]} f(x)\ d\lambda(x) + \nu(]-\infty, t]).$$

Soient $T < t < a_1$. D'après le théorème fondamental de l'analyse,

$$F(t) - F(T) = \int_t^T f(x)\ dx = \int_{]T,t]} f(x)\ d\lambda(x).$$

En faisant tendre T vers $-\infty$, on obtient à gauche $F(t)$ et à droite $\int_{]-\infty,t]} f(x)\ d\lambda(x)$ avec le théorème de convergence monotone. (H_0) est donc vraie, où l'on note

$$(H_i) \quad \forall t < a_i, \quad F(t) = \int_{]-\infty,t]} f(x)\ d\lambda(x) + \sum_{j<i} \mu(a_j).$$

Il suffit alors de montrer que $(H_i) \Longrightarrow (H_{i+1})$ pour conclure. On a

$$F(a_i) = \mu(a_i) + \lim_{t\to a_i^-} F(t) = \int_{]-\infty,a_i]} f(x)\ d\lambda(x) + \sum_{j<i} \mu(a_j) + \mu(a_i)$$

Soient $a_i < T < t < a_{i+1}$. D'après le théorème fondamental de l'analyse,

$$F(t) - F(T) = \int_T^t f(x)\ dx = \int_{]T,t]} f(x)\ d\lambda(x).$$

En faisant tendre T vers a_i, on obtient à gauche $F(t) - F(a_i)$ et à droite $\int_{]a_i,t]} f(x)\ d\lambda(x)$ avec le théorème de convergence monotone. En ajoutant les deux égalités on a

$$F(t) = \int_{]-\infty,t]} f(x)\ d\lambda(x) + \sum_{j<i+1} \mu(a_j).$$

□

On va terminer cette sous-section consacrée aux fonctions de répartition par un théorème général sur la convergence des fonctions de répartition qui sera utile plus tard quand on s'intéressera à la convergence des lois.

Théorème de Helly

Théorème 5.1.4 (Théorème de Helly)**.** *De toute suite $(F_n)_{n\geq 1}$ de fonctions de répartition, on peut extraire une sous-suite $(F_{n_k})_{k\geq 1}$ telle qu'il existe une fonction F croissante continue à droite avec*

$$F_{n_k}(x) \to F(x)$$

en chaque point de continuité de F.

Démonstration. À l'aide du procédé diagonal d'extraction, on commence par extraire une suite $(n_k)_{k\geq 1}$ telle que $F_{n_k}(x)$ converge en tout point x rationnel. On note $G(x)$ la limite obtenue. C'est une fonction définie sur $\mathbb{Q}$, et croissante. On définit alors

$$F(x) = \inf\{G(r); r \in \mathbb{Q}\cap]x, +\infty[\}.$$

Il est encore clair que F est croissante. Montrons que F est continue à droite. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$. Par définition de F, il existe $r > x$, où r est un rationnel tel que $G(r) < F(x) + \varepsilon$. Maintenant, on a

$$\forall y \in [x, r[\quad F(x) \leq F(y) \leq G(r) < F(x) + \varepsilon,$$

ce qui montre bien que F est continue à droite. Reste à montrer que F_{n_k} converge vers F en chaque point de continuité de F. Soit x un point de continuité de F et soit $\varepsilon > 0$. On peut trouver η tel que $|F(x) - F(y)| \leq \varepsilon$ en tout y de $[x-\eta, x+\eta]$. Comme $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, on peut trouver des rationnels r et s tels que $x - \eta \leq r \leq x \leq s \leq x + \eta$. On a pour tout $k \geq 1$:

$$F_{n_k}(r) \leq F_{n_k}(x).$$