Comme les intervalles $[0,a]$ forment un π-système qui engendre la tribu borélienne de $\mathbb{R}_+$, avec $\mathbb{R}_+ = \bigcup_{i=0}^{+\infty} [0,i]$, le théorème 3.4.1 nous dit que la connaissance de m sur les intervalles $([0,a])_{a\in\mathbb{R}_+}$ permet de l'identifier. Or il est facile de voir que

$$Va^n = \int_{[0,a]} Vnt^{n-1}\, d\lambda(t),$$

donc m est la mesure dont la densité par rapport à la mesure de Lebesgue est $t \mapsto Vnt^{n-1}\mathbb{1}_{[0,+\infty[}(t)$. On en déduit que

$$\int_{\mathbb{R}_+} \phi(t)\, dm(t) = V \int_{\mathbb{R}_+} \phi(t) nt^{n-1}\, d\lambda(t),$$

ce qui est le résultat voulu. □

Corollaire 4.12.10. *Le volume de la boule unité euclidienne de $\mathbb{R}^n$ est*

$$V_n = \frac{2\pi^{n/2}}{n\Gamma(n/2)}.$$

Démonstration. On prend $\phi(x) = \exp(-\frac{x^2}{2})$. Le théorème de Tonelli donne

$$\int_{\mathbb{R}^d} \exp(-\frac{\|x\|_2^2}{2})\, d\lambda^{\otimes n}(x) = \left(\int_{\mathbb{R}} \exp(-\frac{x^2}{2})\, d\lambda(x)\right)^n = (2\pi)^{n/2}.$$

D'autre part

$$\int_{\mathbb{R}_+} \exp(-\frac{t^2}{2}) nt^{n-1}\, d\lambda(t) = \int_{\mathbb{R}_+} \exp(-u) n (2u)^{n/2-1}\, d\lambda(u) = 2^{\frac{n}{2}-1} n\Gamma(\frac{n}{2}).$$

En faisant le quotient et en appliquant le théorème précédent, on obtient le résultat voulu. □

Remarque. L'astuce est évidemment de trouver une fonction ϕ pour laquelle on sait calculer les deux intégrales. Ce n'est tout de même pas si fréquent. La méthode permet également de calculer le volume de la boule unité de $\|.\|_p$, définie par $\|x\|_p^p = \sum_{i=1}^n |x_i|^p$, en prenant $\phi(x) = \exp(-x^p)$ (exercice laissé au lecteur ; on trouvera comme volume $\frac{2^n\Gamma(\frac{1}{p}+1)^n}{\Gamma(\frac{n}{p}+1)}$).