$$
\begin{aligned}
&= \int \left(\int g(y) f(x+y)\, d\lambda(x) \right) dm(y) \\
&= \int \left(\int g(y) f(x+y)\, dm(y) \right) d\lambda(x) \\
&= \int \left(\int g(y-x) f(y)\, dm(y) \right) d\lambda(x) \\
&= \int \left(\int g(y-x)\, d\lambda(x) \right) f(y)\, dm(y) \\
&= \int \alpha f(y)\, dm(y).
\end{aligned}
$$

Reste à trouver la valeur de α. En prenant $f = \mathbb{1}_A$, on obtient $\lambda(A) = \alpha m(A)$, ce qui est le résultat voulu. □

Revenons aux propriétés d'invariance de la mesure de Lebesgue.

Théorème 4.12.3. *Soit $M \in SL_d(\mathbb{R})$ (c'est-à-dire que $\det M = 1$). L'application $x \mapsto Mx$ laisse invariante la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$.*

Démonstration. Un théorème d'algèbre linéaire dit que tout élément de $SL_d(\mathbb{R})$ peut s'écrire comme produit de matrices de transvections, c'est-à-dire de matrices de la forme $I_n + \alpha E_{ij}$ avec $i \neq j$, où E_{ij} est la matrice dont tous les coefficients sont nuls, sauf celui en (i,j) qui vaut 1. Ainsi, il suffit de montrer le résultat pour une matrice de transvection. Mais c'est alors un cas particulier de l'exercice 2 vu précédemment : on identifie $\mathbb{R}^d$ à $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{\{2,\dots,d\}}$, on prend $\mu = \lambda^{d-1}$ et $f(x) = \alpha \langle x, e_j \rangle e_i$. □

Théorème 4.12.4. *Soit $M \in M_d(\mathbb{R})$. Pour tout borélien A, on a*

$$\lambda^d(MA) = |\det M| \lambda^d(A).$$

En particulier, pour tout $c \in \mathbb{R}$, $\lambda^d(cA) = |c|^d \lambda^d(A)$.

Démonstration. Dans le cas où $M = \mathrm{diag}(\lambda, 1, \dots, 1)$, on vérifie facilement la formule lorsque A est un pavé : on a deux mesures qui coïncident sur un π-système qui engendre la tribu, elles sont donc égales. Passons au cas où M est inversible. On peut alors écrire $M = \mathrm{diag}(\det M, 1, \dots, 1)N$, où $N \in SL_d(\mathbb{R})$. Ainsi

$$
\begin{aligned}
\lambda^d(MA) &= \lambda^d(\mathrm{diag}(\det M, 1, \dots, 1)NA) = |\det M| \lambda^d(NA) \\
&= |\det M| \lambda^d(N^{-1}(NA)) = |\det M| \lambda^d(A).
\end{aligned}
$$

Reste le cas où M n'est pas inversible, dans ce cas $\det M = 0$, donc il faut montrer que $\lambda^d(MA) = 0$. Pour cela, il suffit de montrer que $\lambda^d(\mathrm{Im}\ M) = 0$. Or $\mathrm{Im}\ M$ est un espace vectoriel de dimension au plus $d-1$, il existe donc une application inversible qui envoie $\mathrm{Im}\ M$ dans $\mathbb{R}^{d-1} \times \{0\}$. Comme $\mathbb{R}^{d-1} \times \{0\}$ est de mesure nulle, $\mathrm{Im}\ M$ aussi. □