incluse dans O. On prend $K = \overline{B}(z_0, r)$.
Posons $F_{\theta,x}(r) = f(x, z_0 + re^{i\theta})$. On a, pour μ-presque tout x, l'égalité (vectorielle)

$$F_{\theta,x}(r) - F_{\theta,x}(0) = \int_0^r F'_{\theta,x}(u)\ du,$$

soit

$$\frac{f(x, z_0 + re^{i\theta}) - f(x, z_0)}{re^{i\theta}} = \frac{1}{r} \int_0^r \frac{\partial}{\partial z} f(x, z_0 + ue^{i\theta})\ du.$$

Ainsi pour tout z tel que $|z - z_0| \leq r$, on a

$$\left| \frac{f(x,z) - f(x,z_0)}{z - z_0} \right| \leq \sup_{z \in \overline{B}(z_0,r)} \left| \frac{\partial}{\partial z} f(x,z) \right| \leq g_{1,B(z_0,r)}(x)\ \mu - \text{p.p.}$$

On conclut alors comme précédemment avec le théorème de convergence dominée et une suite (z_n) quelconque de limite z_0 (à partir d'un certain rang, elle prend ses valeurs dans K). On peut remarquer que la fin de la preuve est presque identique à la preuve du théorème de dérivation sous le signe intégrale, à la différence près qu'on a redémontré "à la main" l'inégalité des accroissements dans le cadre du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$. □

Exercice 1. Posons $\phi(z) = \int_{\mathbb{R}_+} \frac{e^{-x}}{x-z}\ d\lambda(x)$ et montrons que ϕ est holomorphe sur $\mathbb{C} \backslash \mathbb{R}_+$. Soit K un compact de $\mathbb{C} \backslash \mathbb{R}_+$: la fonction $z \mapsto d(z, \mathbb{R}_+)$ est continue sur K, donc y atteint son minimum, noté ε_K. Comme K ne rencontre pas $\mathbb{R}_+$, on a $\varepsilon_K > 0$. On peut donc appliquer le théorème avec $g_K(x) = \frac{e^{-x}}{\varepsilon_K}$. Il s'agit en fait de la transformée de Stieljès de la fonction e^{-x}.

4.8 Mesures à densité

4.8.1 Définition et premières propriétés

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré. Soit f une fonction positive mesurable de $(\Omega, \mathcal{F})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. On peut définir une application ν de $(\Omega, \mathcal{F})$ dans $[0, +\infty]$ par

$$\nu(A) = \int_A f\ d\mu.$$

Il n'est pas difficile de démontrer que ν est une mesure sur $(\Omega, \mathcal{F})$ (exercice laissé au lecteur).

Définition. On dit que ν est une mesure qui admet une densité par rapport à μ et que cette densité est f.

En réalité, il y a ici un abus de langage : en effet, une même mesure ne peut-elle admettre plusieurs densités par rapport à μ ?

Proposition 4.8.1. *Soit ν une mesure σ-finie. Soient f et g deux fonctions mesurables étant toutes deux des densités de ν par rapport à μ. Alors $f = g$ μ-presque partout.*

Démonstration. Supposons d'abord μ finie. Posons $A_+ = \{\omega : f(\omega) > g(\omega)\}$. On a $0 = \nu(A_+) - \nu(A_+) = \int_{A_+} f\ d\mu - \int_{A_+} g\ d\mu = \int_{A_+}(f-g)\ d\mu$.
De même si l'on pose $A_- = \{\omega : f(\omega) < g(\omega)\}$, on a encore la relation $0 = \nu(A_-) - \nu(A_-) = \int_{A_-} f\ d\mu - \int_{A_-} g\ d\mu = \int_{A_-}(f-g)\ d\mu$. Cependant $|f-g| = (f-g)\mathbb{1}_{A_+} - (f-g)\mathbb{1}_{A_-}$, donc

$$\begin{aligned}\int |f-g|\ d\mu &= \int (f-g)\ \mathbb{1}_{A_+}\ d\mu - \int (f-g)\ \mathbb{1}_{A_-}\ d\mu \\ &= \int_{A_+} (f-g)\ d\mu - \int_{A_-} (f-g)\ d\mu = 0 - 0 = 0.\end{aligned}$$

Ce qui implique que $f = g$ μ-presque partout. Cas général : on pose $\nu_n(A) = \nu(A \cap \Omega_n)$, où (Ω_n) est une suite croissante d'ensembles de mesure finie de réunion Ω. ν_n est une mesure finie et admet les densités $f\mathbb{1}_{\Omega_n}$ et $g\mathbb{1}_{\Omega_n}$ qui coïncident donc μ-presque partout : on a $f\mathbb{1}_{\Omega_n} = g\mathbb{1}_{\Omega_n}$ μ-presque partout, et à la limite $f = g$ μ-p.p. □

Théorème 4.8.2. *On suppose que ν est une mesure admettant f comme densité par rapport à μ. Alors, pour toute fonction mesurable g*

$$\int |g|\ d\nu = \int |g| f\ d\mu. \tag{4.3}$$

Si cette quantité est finie, on a alors

$$\int g\ d\nu = \int g f\ d\mu. \tag{4.4}$$

Démonstration. Si $g = \mathbb{1}_A$ avec $A \in \mathcal{F}$, (4.4) est immédiat. Par linéarité, (4.4) est également vérifiée lorsque g est une fonction simple positive. En utilisant le lemme 4.3.3 et le théorème de convergence monotone, il s'ensuit que (4.4) est vraie pour toute fonction mesurable positive, donc en particulier (4.3) est vraie pour toute fonction mesurable g. Supposons maintenant que $\int |g|\ d\nu = \int |g|f\ d\mu < +\infty$: on peut alors écrire $g = g^+ - g^-$ avec $\int g^+\ d\nu < +\infty$ et $\int g^-\ d\nu < +\infty$. Comme g^+ et g^- sont des fonctions mesurables positives, on a $\int g^+\ d\nu = \int g^+ f\ d\mu$ et $\int g^-\ d\nu = \int g^- f\ d\mu$. En faisant la différence, on obtient donc $\int (g^+ - g^-)\ d\nu = \int (g^+ - g^-) f\ d\mu$, soit (4.4). □

4.8.2 Décomposition de Lebesgue

Définition. On dit que la mesure μ est une mesure absolument continue par rapport à λ, ce qui est noté $\mu \ll \lambda$, si pour tout borélien $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, on a :

$\lambda(A) = 0$ implique $\mu(A) = 0$. On dit que la mesure ν est une mesure singulière par rapport à λ, ce que l'on note $\nu \perp \lambda$, s'il existe $N \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ tel que $\lambda(N) = 0$ et $\nu(N^c) = 0$.

Remarque. Un tel borélien N n'est pas nécessairement unique.

Théorème 4.8.3. *Toute mesure $\sigma-$finie μ sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ se décompose de façon unique sous la forme $\mu = \nu_1 + \nu_2$, où ν_1 est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue λ et ν_2 est singulière par rapport à λ.*

Démonstration. Montrons tout d'abord l'existence d'une telle décomposition. Considérons l'ensemble des négligeables pour la mesure λ :

$$\mathcal{N} = \{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R});\ \lambda(A) = 0\}.$$

Posons $\alpha = \sup\{\mu(A);\ A \in \mathcal{N}\}$. Si $\alpha = 0$, alors $\mu = \nu_1$ et il n'y a rien à démontrer. Supposons donc $\alpha > 0$. Dans ce cas, il existe une suite croissante (A_n) d'éléments de $\mathcal{N}$ telle que $\mu(A_n) \geq \alpha - \frac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Ainsi, l'ensemble $A = \cup_{n\geq 1} A_n \in \mathcal{N}$ vérifie $\mu(A) = \alpha$. Soit maintenant $B \subset A^c$ tel que $\lambda(B) = 0$. On se demande s'il est possible d'avoir $\mu(B) > 0$. On sait que $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) \geq \alpha$ et $A \cup B \in \mathcal{N}$ donc $\mu(A \cup B) \leq \alpha$. On voit donc que nécessairement $\mu(B) = 0$. Posons maintenant $\nu_1 = \mathbb{1}_{A^c}\mu$ et $\nu_2 = \mathbb{1}_A \mu$. La mesure ν_1 admet la densité $\mathbb{1}_{A^c}$ par rapport à μ. On a

$$\nu_1(B) = \int_B \mathbb{1}_{A^c}\ d\mu = \int \mathbb{1}_{A^c}\mathbb{1}_B\ d\mu = \int \mathbb{1}_{A^c \cap B}\ d\mu = \mu(A^c \cap B).$$

Ainsi, si B est tel que $\lambda(B) = 0$, alors $\nu_1(B) = \mu(A^c \cap B) = 0$ et donc $\nu_1 \ll \lambda$. On remarque de plus que $\lambda(A^c) = 0$ et $\nu_2(A^c) = \mu(A \cap A^c) = 0$. Donc ν_2 est bien singulière par rapport à λ.

Pour montrer l'unicité de la décomposition, supposons que $\mu = \nu_1' + \nu_2'$, avec $\nu_1' \ll \lambda$ et $\nu_2' \perp \lambda$. Choisissons donc des ensembles $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ tels que $\nu_2(A) = \lambda(A^c) = \nu'{}_2(B) = \lambda(B^c) = 0$. On a alors

$$\nu_2(A \cap B) = \nu_2'(A \cap B) = \nu_1(A^c \cup B^c) = \nu_1'(A^c \cup B^c) = 0.$$

Donc $\nu_1 = \mathbb{1}_{A\cap B}\ \nu_1 = \mathbb{1}_{A\cap B}\ \mu = \mathbb{1}_{A\cap B}\ \nu_1' = \nu_1'$ et $\nu_2 = \mu - \nu_1 = \mu - \nu_1' = \nu_2'$.

$\square$

Remarque. En réalité, on peut dire un peu plus : la mesure ν_1 apparaissant dans la décomposition du théorème admet une densité par rapport à la mesure de Lebesgue. Ce résultat constitue le théorème de Radon-Nikodým. Ce résultat, que nous ne démontrerons pas ici, peut être établi à l'aide de techniques hilbertiennes (voir par exemple Rudin [28]).