

par intersection finie et par complémentation). Donc, comme  $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$  est un  $\lambda$ -système, on a  $A = \bigcup_{n \geq 1} A_n = \bigcup_{n \geq 1} A'_n \in \mathcal{A}$ , d'après le troisième axiome d'un  $\lambda$ -système.

**Théorème 3.5.1** (Théorème  $\lambda - \pi$ ). *Si  $\mathcal{P}$  est un  $\pi$ -système et si  $\mathcal{L}$  est un  $\lambda$ -système, alors  $\mathcal{P} \subset \mathcal{L}$  entraîne  $\sigma(\mathcal{P}) \subset \mathcal{L}$ .*

*Démonstration.* Notons  $\mathcal{L}'$  l'intersection de tous les  $\lambda$ -systèmes contenant  $\mathcal{P}$ . En s'inspirant de la preuve de l'existence de la tribu engendrée, on voit sans peine que  $\mathcal{L}'$  est un  $\lambda$ -système, contenu dans tous les  $\lambda$ -systèmes contenant  $\mathcal{P}$ . Ainsi, pour montrer que  $\sigma(\mathcal{P}) \subset \mathcal{L}$ , il suffit de montrer que  $\sigma(\mathcal{P}) \subset \mathcal{L}'$ . Pour cela, il suffit de prouver que  $\mathcal{L}'$  est une tribu puisque  $\mathcal{L}'$  contient  $\mathcal{P}$  et que  $\sigma(\mathcal{P})$  la plus petite des tribus qui contiennent  $\mathcal{P}$ . D'après la remarque précédente, il suffit de montrer que  $\mathcal{L}'$  est un  $\pi$ -système. Pour  $E \in \mathcal{L}'$ , notons  $\mathcal{L}_E = \{A \in \mathcal{L}'; A \cap E \in \mathcal{L}'\}$ . Montrons que pour tout  $E \in \mathcal{L}'$ ,  $\mathcal{L}_E$  est un  $\lambda$ -système. On a :

- $\Omega \in \mathcal{L}'$  et  $\Omega \cap E = E \in \mathcal{L}'$ , donc  $\Omega \in \mathcal{L}_E$
- Si  $A, B$  sont dans  $\mathcal{L}_E$  avec  $A \subset B$ , alors on a

$$(B \setminus A) \cap E = (B \cap E) \setminus (A \cap E) \in \mathcal{L}'$$

car  $\mathcal{L}'$  est un  $\lambda$ -système, et  $B \setminus A \in \mathcal{L}'$ , donc  $B \setminus A \in \mathcal{L}_E$ .

- De même, si les  $A_i$  forment une suite croissante d'éléments de  $\mathcal{L}_E$ , alors  $\bigcup_{n \geq 1} A_n \in \mathcal{L}'$  et  $\left( \bigcup_{n \geq 1} A_n \right) \cap E = \left( \bigcup_{n \geq 1} (A_n \cap E) \right) \in \mathcal{L}'$  car  $\mathcal{L}'$  est un  $\lambda$ -système, donc  $\bigcup_{n \geq 1} A_n \in \mathcal{L}_E$ .

Comme  $\mathcal{L}_E$  est un  $\lambda$ -système qui contient  $\mathcal{P}$ , on a  $\mathcal{L}_E$  contient  $\mathcal{L}'$ , ce qui veut dire que pour tout  $E \in \mathcal{L}'$  et  $F \in \mathcal{L}'$ , on a  $E \cap F \in \mathcal{L}'$ . Autrement dit, pour  $F \in \mathcal{L}'$ ,  $\Lambda_F$  contient  $\mathcal{P}$ . Ce qui montre que  $\mathcal{L}'$  est un  $\pi$ -système et achève donc la preuve.  $\square$

*Démonstration du théorème 3.4.1.* Soit  $n \geq 1$ . Considérons l'ensemble  $\mathcal{L}$  des éléments de la tribu  $\mathcal{F}$  engendrée par le  $\pi$ -système telles que

$$\mathbb{P}(A \cap \Omega_n) = \mathbb{Q}(A \cap \Omega_n).$$

Il n'est pas difficile (en utilisant notamment le théorème de continuité séquentielle croissante) de voir que  $\mathcal{L}$  est un  $\lambda$ -système ; il suffit alors d'appliquer le théorème  $\lambda - \pi$  de Dynkin, pour voir que pour tout  $A$ , on a l'identité  $\mathbb{P}(A \cap \Omega_n) = \mathbb{Q}(A \cap \Omega_n)$ . Le théorème de continuité séquentielle croissante permet alors de conclure.  $\square$