

par intersection finie et par complémentation). Donc, comme $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ est un λ -système, on a $A = \bigcup_{n \geq 1} A_n = \bigcup_{n \geq 1} A'_n \in \mathcal{A}$, d'après le troisième axiome d'un λ -système.

Théorème 3.5.1 (Théorème $\lambda - \pi$). *Si \mathcal{P} est un π -système et si \mathcal{L} est un λ -système, alors $\mathcal{P} \subset \mathcal{L}$ entraîne $\sigma(\mathcal{P}) \subset \mathcal{L}$.*

Démonstration. Notons \mathcal{L}' l'intersection de tous les λ -systèmes contenant \mathcal{P} . En s'inspirant de la preuve de l'existence de la tribu engendrée, on voit sans peine que \mathcal{L}' est un λ -système, contenu dans tous les λ -systèmes contenant \mathcal{P} . Ainsi, pour montrer que $\sigma(\mathcal{P}) \subset \mathcal{L}$, il suffit de montrer que $\sigma(\mathcal{P}) \subset \mathcal{L}'$. Pour cela, il suffit de prouver que \mathcal{L}' est une tribu puisque \mathcal{L}' contient \mathcal{P} et que $\sigma(\mathcal{P})$ la plus petite des tribus qui contiennent \mathcal{P} . D'après la remarque précédente, il suffit de montrer que \mathcal{L}' est un π -système. Pour $E \in \mathcal{L}'$, notons $\mathcal{L}_E = \{A \in \mathcal{L}'; A \cap E \in \mathcal{L}'\}$. Montrons que pour tout $E \in \mathcal{L}'$, \mathcal{L}_E est un λ -système. On a :

- $\Omega \in \mathcal{L}'$ et $\Omega \cap E = E \in \mathcal{L}'$, donc $\Omega \in \mathcal{L}_E$
- Si A, B sont dans \mathcal{L}_E avec $A \subset B$, alors on a

$$(B \setminus A) \cap E = (B \cap E) \setminus (A \cap E) \in \mathcal{L}'$$

car \mathcal{L}' est un λ -système, et $B \setminus A \in \mathcal{L}'$, donc $B \setminus A \in \mathcal{L}_E$.

- De même, si les A_i forment une suite croissante d'éléments de \mathcal{L}_E , alors

$$\bigcup_{n \geq 1} A_n \in \mathcal{L}' \text{ et } \left(\bigcup_{n \geq 1} A_n \right) \cap E = \left(\bigcup_{n \geq 1} (A_n \cap E) \right) \in \mathcal{L}' \text{ car } \mathcal{L}' \text{ est}$$

un λ -système, donc $\bigcup_{n \geq 1} A_n \in \mathcal{L}_E$.

Comme \mathcal{L}_E est un λ -système qui contient \mathcal{P} , on a \mathcal{L}_E contient \mathcal{L}' , ce qui veut dire que pour tout $E \in \mathcal{L}'$ et $F \in \mathcal{L}'$, on a $E \cap F \in \mathcal{L}'$. Autrement dit, pour $F \in \mathcal{L}'$, \mathcal{L}_F contient \mathcal{P} . Ce qui montre que \mathcal{L}' est un π -système et achève donc la preuve. \square

Démonstration du théorème 3.4.1. Soit $n \geq 1$. Considérons l'ensemble \mathcal{L} des éléments de la tribu \mathcal{F} engendrée par le π -système telles que

$$\mathbb{P}(A \cap \Omega_n) = \mathbb{Q}(A \cap \Omega_n).$$

Il n'est pas difficile (en utilisant notamment le théorème de continuité séquentielle croissante) de voir que \mathcal{L} est un λ -système; il suffit alors d'appliquer le théorème $\lambda - \pi$ de Dynkin, pour voir que pour tout A , on a l'identité $\mathbb{P}(A \cap \Omega_n) = \mathbb{Q}(A \cap \Omega_n)$. Le théorème de continuité séquentielle croissante permet alors de conclure. \square