3.3.2 Conditionnement par tous les cas possibles

Le résultat suivant est l'expression en termes de probabilités conditionnelles du principe de partition.

Théorème 3.3.3. *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soient I un ensemble d'indices fini ou dénombrable et $(\Omega_i)_{i\in I}$ une partition $\mathcal{F}-$mesurable de Ω. Alors on a*

$$\forall A \in \mathcal{F}, \quad \mathbb{P}(A) = \sum_{i\in J} \mathbb{P}(A|\Omega_i)\mathbb{P}(\Omega_i),$$

où $J = \{i \in I; \mathbb{P}(\Omega_i) > 0\}$.

Démonstration. D'après le théorème 3.2.1, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A) &= \sum_{i\in I} \mathbb{P}(A \cap \Omega_i) = \sum_{i\in J} \mathbb{P}(A \cap \Omega_i) + \sum_{i\in I\setminus J} \mathbb{P}(A \cap \Omega_i) \\ &= \sum_{i\in J} \mathbb{P}(A \cap \Omega_i) = \sum_{i\in J} \mathbb{P}(A|\Omega_i)\mathbb{P}(\Omega_i). \end{aligned}$$

□

3.3.3 Formule de Bayes

Théorème 3.3.4. *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soient I un ensemble d'indices fini ou dénombrable et $(\Omega_i)_{i\in I}$ une partition mesurable de Ω telle que pour tout $i \in I$, $\Omega_i \in \mathcal{F}$ avec $\mathbb{P}(\Omega_i) > 0$. Soit A un événement de probabilité non nulle. Alors on a, pour tout $j \in I$, la formule*

$$\mathbb{P}(\Omega_j|A) = \frac{\mathbb{P}(A|\Omega_j)\mathbb{P}(\Omega_j)}{\sum\limits_{i\in I} \mathbb{P}(A|\Omega_i)\mathbb{P}(\Omega_i)}.$$

Démonstration. On écrit

$$\mathbb{P}(\Omega_j|A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap \Omega_j)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(A|\Omega_j)\mathbb{P}(\Omega_j)}{\mathbb{P}(A)}$$

et on applique le théorème précédent. □

Exemple.
— 60% des étudiants qui vont en T.D. obtiennent l'examen.
— 10% des étudiants qui ne vont pas en T.D. obtiennent l'examen.
— 70% des étudiants vont en T.D.

Quelle proportion des lauréats a séché les cours ? On note A l'événement "être assidu au cours". On a $\mathbb{P}(A) = 0.7$, et donc $\mathbb{P}(A^c) = 0.3$. On note L l'événement "obtenir l'examen" : on a $\mathbb{P}(L|A^c) = 0.1$ et $\mathbb{P}(L|A) = 0.6$. On obtient alors

$$\mathbb{P}(A^c|L) = \frac{\mathbb{P}(L|A^c)\mathbb{P}(A^c)}{\mathbb{P}(L|A^c)\mathbb{P}(A^c) + \mathbb{P}(L|A)\mathbb{P}(A)} = \frac{0.1 \times 0.3}{0.1 \times 0.3 + 0.6 \times 0.7} = \frac{3}{45} = \frac{1}{15}.$$