Démonstration. Avec les notations du théorème 2.1.8, $H = G \circ F$ car on sait que $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Pour les cas particuliers de fonction G données dans l'énoncé, notons que G étant une application continue de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, c'est une application $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)) - (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mesurable, ou de manière équivalente $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})) - (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mesurable. Les applications continues sont mesurables par rapport aux tribus boréliennes associées aux topologies correspondantes. □

2.2 Mesures

2.2.1 Algèbres

Définition. On dit qu'une partie $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ est une algèbre si elle vérifie les propriétés suivantes :

1. $\varnothing \in \mathcal{A}$.
2. $\forall A \in \mathcal{A}$, on a $A^c \in \mathcal{A}$.
3. Pour tous A et B dans $\mathcal{A}$, on a $A \cup B \in \mathcal{A}$.

Remarque. Il n'est pas difficile de démontrer qu'une algèbre est stable par union finie ou intersection finie.

On voit tout de suite que la différence avec la définition d'une tribu est que la stabilité par réunion dénombrable n'est pas requise. En fait, les tribus sont parfois appelées σ-algèbres, la lettre σ étant traditionnellement attachée aux propriétés liées à des familles dénombrables.

Remarque. En anglais,
— algèbre se dit “field”, ou “algebra”.
— tribu (σ-algèbre) se dit “σ-field”, ou “σ-algebra”.

2.2.2 Espace mesuré

Soit $\mathcal{A}$ une algèbre. On appelle mesure sur $(\Omega, \mathcal{A})$ toute application

$$\mu : \quad \mathcal{A} \quad \to [0, +\infty]$$

vérifiant les propriétés suivantes :

1. $\mu(\varnothing) = 0$.
2. Pour toute suite $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{A}$ deux à deux disjoints et telle que $\bigcup\limits_{i=1}^{+\infty} A_i \in \mathcal{A}$, on a

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i \right) = \sum_{i=1}^{+\infty} \mu(A_i).$$