On note dans la suite $\mathcal{V}(A,\mathcal{A})$ l'ensemble des applications mesurables de $(A,\mathcal{A})$ dans $(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$. De même, on note $\overline{\mathcal{V}}(A,\mathcal{A})$ l'ensemble des applications mesurables de $(A,\mathcal{A})$ dans $(\overline{\mathbb{R}},\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$ et $\overline{\mathcal{V}}_+(A,\mathcal{A})$ l'ensemble des applications mesurables de $(A,\mathcal{A})$ dans $(\overline{\mathbb{R}}_+,\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+))$.

Tribu produit

Définition. Soient $(\Omega,\mathcal{A})$ et $(\Omega',\mathcal{B})$ deux espaces mesurables. On appelle tribu produit sur $\Omega\times\Omega'$ la tribu engendrée par les ensembles $A\times B\in\mathcal{A}\times\mathcal{B}$. On note $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$ cette tribu.

Remarque. Si π_1 est l'application de $\Omega\times\Omega'$ dans Ω qui à $(x,y)\in\Omega\times\Omega'$ associe $\pi_1(x,y)=x$, alors π_1 (la projection sur la première coordonnée) est une application $(\Omega\times\Omega',\mathcal{A}\otimes\mathcal{B})-(\Omega,\mathcal{A})$ mesurable. En effet, si $A\in\mathcal{A}$, $\pi_1^{-1}(A)=A\times\Omega'\in\mathcal{A}\times\mathcal{B}\subset\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$. De même, si π_2 est l'application de $\Omega\times\Omega'$ dans Ω' qui à $(x,y)\in\Omega\times\Omega'$ associe $\pi_2(x,y)=y$, alors π_2 (la projection sur la deuxième coordonnée) est une application $(\Omega\times\Omega',\mathcal{A}\otimes\mathcal{B})-(\Omega',\mathcal{B})$ mesurable.

Théorème 2.1.7. *On suppose que $\mathcal{A}=\sigma((A_i)_{i\in I})$ et $\mathcal{B}=\sigma((B_j)_{j\in J})$. On suppose en outre qu'il existe I' et J' dénombrables avec $I'\subset I$, $J'\subset J$ et tels que $\Omega=\underset{i\in I'}{\cup}A_i$ et $\Omega'=\underset{j\in J'}{\cup}B_j$. Alors $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}=\sigma((A_i\times B_j)_{(i,j)\in I\times J})$.*

Démonstration. Notons $\mathcal{O}$ la tribu engendrée par les $(A_i\times B_j)_{(i,j)\in I\times J}$. Pour $A\subset\Omega$, on note $\mathcal{C}_A=\{B\in\mathcal{B}:A\times B\in\mathcal{O}\}$. Montrons que pour tout $i\in I$, $\mathcal{C}_{A_i}=\mathcal{B}$. Comme $\mathcal{C}_{A_i}$ contient les B_j qui engendrent $\mathcal{B}$, il suffit de voir que $\mathcal{C}_{A_i}$ est une tribu. On a $A_i\times\varnothing=\varnothing\in\mathcal{O}$. De même, il est facile de voir que $\mathcal{C}_{A_i}$ est stable par réunion dénombrable (laissé au lecteur). On en déduit que $\Omega'=\cup_{j\in J'}B_j\in\mathcal{C}_{A_i}$. Pour $B\in\mathcal{C}_{A_i}$, on a $A_i\times(\Omega'\backslash B)=(A_i\times\Omega')\backslash(A_i\times B)\in\mathcal{O}$, d'où $B^c\in\mathcal{C}_{A_i}$. $\mathcal{C}_{A_i}$ est donc bien une sous-tribu de $\mathcal{B}$: elle contient les B_j qui engendrent $\mathcal{B}$: c'est $\mathcal{B}$. Notons $\mathcal{D}=\{A\in\mathcal{A}:\mathcal{C}_A=\mathcal{B}\}$. En procédant comme précédemment, le lecteur montre (laissé en exercice) que $\mathcal{D}$ est une sous-tribu de $\mathcal{A}$. Mais $\mathcal{D}$ contient les A_i. Comme les A_i engendrent $\mathcal{A}$, on a $\mathcal{D}=\mathcal{A}$, ce qui signifie que pour tout $(A,B)\in\mathcal{A}\times\mathcal{B}$, on a $A\times B\in\mathcal{O}$. En considérant les tribus engendrées, on a $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}\subset\mathcal{O}$. L'inclusion réciproque est évidente. □

Théorème 2.1.8. *Soient f une application de Ω_3 dans Ω_1, g une application de Ω_3 dans Ω_2. On définit une application $F:\Omega_3\to\Omega_1\times\Omega_2$ par $F(x)=(f(x),g(x))$. L'application F est $(\Omega_3,\mathcal{C})-(\Omega_1\times\Omega_2,\mathcal{A}\otimes\mathcal{B})$ mesurable si et seulement si f est $(\Omega_3,\mathcal{C})-(\Omega_1,\mathcal{A})$ mesurable et g est $(\Omega_3,\mathcal{C})-(\Omega_2,\mathcal{B})$ mesurable.*

Démonstration. La condition est nécessaire car $f=\pi_1\circ F$ et $g=\pi_2\circ F$. Ainsi lorsque F est $(\Omega_3,\mathcal{C})-(\Omega_1\times\Omega_2,\mathcal{A}\otimes\mathcal{B})$ mesurable, comme π_2 est