Corollaire 2.1.4. *Soient A et B deux espaces topologiques. Toute application continue de $(A, \mathcal{B}(A))$ dans $(B, \mathcal{B}(B))$ est mesurable de $(A, \mathcal{B}(A))$ dans $(B, \mathcal{B}(B))$.*

Théorème 2.1.5. *La tribu borélienne de $\mathbb{R}^d$ est également la tribu engendrée par les pavés ouverts de $\mathbb{R}^d$ dont les côtés ont des extrémités rationnelles : les ensembles de la forme $\prod_{i=1}^{d}]a_i, b_i[$, avec $a_i < b_i$ et a_i, b_i dans $\mathbb{Q}$.*

Démonstration. Soit $\mathcal{T}$ la tribu engendrée par ces pavés : $\mathcal{T} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ car ces pavés sont eux-mêmes des ouverts de $\mathbb{R}^d$. Pour obtenir l'inclusion réciproque, il suffit de montrer que chaque ouvert O de $\mathbb{R}^d$ est dans $\mathcal{T}$. Soit donc O un ouvert non-vide de $\mathbb{R}^d$. Soit $x \in O$: il existe $\varepsilon > 0$ tel que $x +]-\varepsilon, +\varepsilon[^d \subset O$. Comme $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, on peut trouver des rationnels $a_i(x)$ et $b_i(x)$ avec $x_i - \varepsilon < a_i(x) < x_i < b_i(x) < x_i + \varepsilon$. Posons alors $U(x) = \prod_{i=1}^{d}]a_i(x), b_i(x)[$. On a

$$O = \bigcup_{x \in O} U(x).$$

On peut définir une relation d'équivalence sur O par $u \sim v$ si et seulement si $U(u) = U(v)$. Évidemment, l'application U passe au quotient, et on peut écrire

$$O = \bigcup_{x \in O/\sim} U(x).$$

Mais $O/\sim$ est au plus dénombrable car U est à valeurs dans $\mathbb{Q}^{2d}$ qui est dénombrable. Ainsi, O est réunion dénombrable d'éléments de $\mathcal{T}$, donc O est dans $\mathcal{T}$. □

Remarque. Pour le lecteur n'appréciant pas le passage au quotient, voici une autre démonstration du résultat précédent (pour montrer que O est dans $\mathcal{T}$). Notons P l'ensemble des pavés ouverts de $\mathbb{R}^d$ à extrémités rationnelles. On a alors

$$O = \bigcup_{U \in \{U(x):\ x \in O\}} U.$$

Comme $\{U(x) :\ x \in O\} \subset P$ qui est dénombrable, cela prouve bien que O est réunion dénombrable d'éléments de $\mathcal{T}$, donc O est dans $\mathcal{T}$.

On peut en déduire aisément que la tribu borélienne de $\mathbb{R}$ est engendrée par les ensembles de la forme $]-\infty, a[$, où a décrit $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{Q}$).

Corollaire 2.1.6. *Soient $(A, \mathcal{A})$ un espace mesurable, f une application de A dans $\mathbb{R}$. Si pour tout $a \in \mathbb{R}$, l'ensemble $f^{-1}(]-\infty, a[)$ est dans $\mathcal{A}$, alors f est mesurable de $(A, \mathcal{A})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.*