1.5.2 Le théorème de Dini-Polyà

Théorème 1.5.2. *Soit (f_n) une suite d'applications croissantes définies sur $[a,b]$ et convergeant simplement vers la fonction continue f. Alors f_n converge uniformément vers f sur $[a,b]$.*

Ce théorème est aussi appelé deuxième théorème de Dini.

Démonstration. Comme f est uniformément continue sur $[a,b]$ qui est compact, il existe n_0 tel que $|f(x)-f(y)| \leq \varepsilon/3$ dès que $|x-y| \leq \frac{b-a}{n_0}$. Posons, pour k compris entre 0 et n_0 : $x_k = a + k\frac{b-a}{n_0}$: on peut trouver $n_1 \geq n_0$ tel que $|f(x_k) - f_n(x_k)| \leq \varepsilon/3$ pour tout $n \geq n_1$ et tout k compris entre 0 et n_0. Pour x compris entre x_k et x_{k+1}, et $n, p \geq n_1$, on a

$$f_n(x) - f_p(x) \leq f_n(x_{k+1}) - f_p(x_k) \leq 2\varepsilon/3 + f(x_{k+1}) - f(x_k) \leq \varepsilon.$$

Ainsi $\sup\limits_{n,p\geq n_1} \sup\limits_{x\in[a,b]} |f_n(x)-f_p(x)| \leq \varepsilon$, ce qui montre bien qu'on a un critère de Cauchy uniforme pour la suite f_n. □

1.6 Exercices d'analyse

1.6.1 Exercices corrigés

Exercice 1. Étudier la convergence de chacune des séries de terme général u_n suivant :

a) $u_n = \frac{(n^2+1)2^n}{(2n+1)!}$,

b) $u_n = \left(\frac{n^2-5n+1}{n^2-4n+2}\right)^{n^2}$,

c) $u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} e^{-n}$,

d) $u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2}$.

e) $u_n = \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$.

Exercice 2. Étudier la nature et calculer éventuellement la somme des séries suivantes :

a) $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(n-1)}$. En déduire la convergence de la série $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

b) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+\alpha)(n+\alpha+1)}$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0, -1, \ldots$.

c) $\sum\limits_{n=3}^{+\infty} \frac{14n-18}{n^3-7n+6}$.