- $f \mapsto \int_a^b f(x)dx$ est linéaire
- $f \geq 0$ sur $[a,b]$ entraîne $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.
- $f \mapsto \int_a^b 1\ dx = b-a$
- $\int_a^c f(x)\ dx = \int_a^b f(x)\ dx + \int_b^c f(x)\ dx$

Ces propriétés suffisent à retrouver la convergence des sommes de Riemann des fonctions continues vers l'intégrale. En effet, si l'on a

$$a = a_0 \leq x_0 \leq a_1 \leq x_1 \leq \dots x_{n-1} \leq a_n = b$$

et si l'on pose $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} (a_k - a_{k-1}) f(x_k)$, on obtient alors

$$S_n - \int_a^b f(x)\ dx = \sum_{k=1}^{n} \int_{a_{k-1}}^{a_k} \left(f(x_k) - f(x)\right)\ dx,$$

d'où

$$\begin{aligned} |S_n - \int_a^b f(x)\ dx| &\leq \sum_{k=1}^{n} \int_{a_{k-1}}^{a_k} |f(x_k) - f(x)|\ dx \\ &\leq \sum_{k=1}^{n} \int_{a_{k-1}}^{a_k} D_n\ dx = (b-a)D_n, \end{aligned}$$

avec

$$D_n = \omega_f(e_n) \text{ où } \omega_f(\delta) = \sup_{\substack{x,y \in [a,b] \\ |x-y| \leq \delta}} |f(x) - f(y)| \text{ et } e_n = \max_{1 \leq i \leq n} (a_i - a_{i-1}).$$

Comme f est continue sur le compact $[a,b]$, elle y est uniformément continue, donc $\omega_f(\delta)$ a une limite nulle lorsque $\delta \to 0$. Ainsi, on obtient la convergence de S_n vers $\int_a^b f(x)\ dx$ dès que D_n est de limite nulle. En particulier, on a le résultat classique

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + (b-a)\frac{k}{n}\right) = \int_a^b f(t)\ dt$$

pour toute fonction continue sur le compact $[a,b]$.

Malheureusement, l'intégrale de Riemann n'est pas équipée pour traiter de l'intégrale des fonctions continues sur un intervalle ouvert, bornée ou non. On fabrique alors une rustine, appelée "intégrale impropre" : si f est une fonction continue sur $[a,b[$ (avec éventuellement $b=+\infty$) telle que la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)\ dt$ admette une limite L quand x tend vers b, on dit alors que L est l'intégrale de f entre a et b et on note $\int_a^b f(t)\ dt = L$. Comme pour les séries, il est fréquent que l'on ne sache pas déterminer la limite. En revanche, l'existence de la limite peut être obtenue par