Démonstration. Posons $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ pour $n \geq 0$. Pour $n \geq 1$, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=n}^{p} a_k f_k &= \sum_{k=n}^{p} (S_k - S_{k-1}) f_k = \sum_{k=n}^{p} S_k f_k - \sum_{k=n}^{p} S_{k-1} f_k \\
&= \sum_{k=n}^{p} S_k f_k - \sum_{k=n-1}^{p-1} S_k f_{k+1} \\
&= S_{n-1} f_n - S_p f_p + \sum_{k=n}^{p-1} S_k (f_k - f_{k+1}).
\end{aligned}$$

Cette écriture se nomme une transformation d'Abel. Il s'agit tout simplement d'une intégration par parties discrète.

Maintenant en posant $\varepsilon_n = \sup\{f_k; k \geq n\}$ et $M = \sup\{|S_k|; k \in \mathbb{N}\}$, on a

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{k=n}^{p} a_k f_k \right| &\leq M\varepsilon_n + M\varepsilon_n + \sum_{k=n}^{p-1} M |f_k - f_{k+1}| \\
&= 2M\varepsilon_n + \sum_{k=n}^{p-1} M (f_k - f_{k+1}) \leq 3M\varepsilon_n.
\end{aligned}$$

□

Le critère spécial des séries alternées est un cas particulier du critère de Dirichlet (on écrit $a_n = (-1)^n |a_n|$, ou $a_n = (-1)^{n+1} |a_n|$).

Il est très important de savoir effectuer une transformation d'Abel. On verra en exercice (exercice non corrigé 7) une variante où la transformation est effectuée sur les restes, plutôt que sur les sommes partielles [2].

1.2.6 Bref rappel sur l'intégrale de Riemann

Le présent paragraphe ne vise pas à refaire toute la théorie de l'intégration Riemann, mais juste à préciser les statuts relatifs de l'intégrale de Riemann et de ses extensions "impropres".

Pour les usages courants, l'intégrale dite de Riemann étudie essentiellement les fonctions continues (ou continues par morceaux) sur un intervalle compact. Ainsi, on sait presque tout sur l'intégrale de Riemann si l'on retient que à tout intervalle compact $[a, b]$, à toute fonction continue par morceaux sur $[a, b]$, on peut associer un nombre que l'on note $\int_a^b f(x)dx$, de telle manière que l'application $(a, b, f) \mapsto \int_a^b f(x)dx$ vérifie :

2. À l'inverse du critère spécial des séries alternées, le critère de Dirichlet n'est ni au programme des concours des grandes écoles, ni à celui des concours de recrutement des professeurs de l'enseignement secondaire. Il est donc très important de savoir refaire la preuve, d'autant plus que la terminologie n'est pas bien fixée.