

# Table des matières

Notations	1
<b>1 Compléments d'analyse</b>	<b>3</b>
1.1 Grand $O$ , petit $o$ : des amis fidèles . . . . .	3
1.1.1 La notation grand $O$ . . . . .	3
1.1.2 La notation petit $o$ . . . . .	4
1.1.3 Équivalence de deux fonctions, de deux suites . . . . .	5
1.2 Convergence de séries et d'intégrales . . . . .	6
1.2.1 Séries à termes positifs . . . . .	6
1.2.2 Convergences et divergences triviales . . . . .	8
1.2.3 Critère de Cauchy . . . . .	9
1.2.4 Séries absolument convergentes . . . . .	9
1.2.5 Outils pour les séries semi-convergentes . . . . .	9
1.2.6 Bref rappel sur l'intégrale de Riemann . . . . .	10
1.2.7 Lien série-intégrale . . . . .	12
1.3 La droite réelle achevée . . . . .	13
1.4 Limite supérieure . . . . .	14
1.4.1 Limites supérieures, inférieures d'une suite . . . . .	14
1.4.2 Limites supérieures, inférieures d'ensembles . . . . .	18
1.5 Compléments sur la compacité . . . . .	19
1.5.1 Le procédé diagonal d'extraction . . . . .	19
1.5.2 Le théorème de Dini-Polyà . . . . .	20
1.6 Exercices d'analyse . . . . .	21
1.6.1 Exercices corrigés . . . . .	21
1.6.2 Exercices non corrigés . . . . .	22
<b>2 Un peu de théorie de la mesure</b>	<b>25</b>
2.1 Tribus . . . . .	25
2.1.1 Axiomes de base . . . . .	25
2.1.2 Propriétés . . . . .	26
2.1.3 Sous-tribus . . . . .	26

2.1.4	Opérations sur les tribus . . . . .	26
	Intersection de tribus . . . . .	26
	Tribu engendrée par une famille de tribus . . . . .	27
	Tribu engendrée par une famille d'ensembles . . . . .	27
2.1.5	Tribu borélienne, fonctions mesurables . . . . .	27
	Tribu produit . . . . .	30
2.2	Mesures . . . . .	32
2.2.1	Algèbres . . . . .	32
2.2.2	Espace mesuré . . . . .	33
2.2.3	Masse de Dirac . . . . .	35
2.2.4	Mesure de comptage . . . . .	36
2.2.5	Opérations simples . . . . .	36
2.2.6	Mesure image . . . . .	37
2.2.7	Extension d'une mesure – mesure de Lebesgue . . . . .	37
2.3	Convergence et mesurabilité . . . . .	39
2.3.1	Tribu borélienne de $\mathbb{R}$ . . . . .	39
2.3.2	Importance de la séparabilité de $\mathbb{R}$ (et $\mathbb{R}$ ) . . . . .	39
2.3.3	Convergence et mesurabilité . . . . .	40
2.4	Exercices de théorie de la mesure . . . . .	41
2.4.1	Exercices corrigés . . . . .	41
2.4.2	Exercices non corrigés . . . . .	44
<b>3</b>	<b>Espace probabilisé</b> . . . . .	<b>47</b>
3.1	Espace probabilisé . . . . .	47
3.2	Partitions et probabilités . . . . .	49
3.3	Probabilité conditionnelle . . . . .	49
3.3.1	Conditionnements en chaîne . . . . .	50
3.3.2	Conditionnement par tous les cas possibles . . . . .	51
3.3.3	Formule de Bayes . . . . .	51
3.4	Indépendance . . . . .	52
3.4.1	Événements indépendants . . . . .	52
3.4.2	Tribus indépendantes . . . . .	52
3.4.3	Indépendance et tribus engendrées . . . . .	53
3.5	Théorème $\lambda - \pi$ de Dynkin (*) . . . . .	54
3.6	Exercices sur le formalisme probabiliste . . . . .	56
3.6.1	Exercices corrigés . . . . .	56
3.6.2	Exercices non corrigés . . . . .	59
<b>4</b>	<b>Intégrales</b> . . . . .	<b>63</b>
4.1	Définition de l'intégrale et propriétés de base . . . . .	63
4.1.1	Définition . . . . .	63
4.1.2	Propriétés de base de l'intégrale . . . . .	64

4.1.3	Les grands théorèmes . . . . .	65
4.2	Intégration sur un ensemble . . . . .	66
4.3	Quelques cas particuliers importants . . . . .	66
4.3.1	Intégration par rapport à une masse de Dirac . . . . .	66
4.3.2	Intégration par rapport à la mesure de comptage . . . . .	67
4.3.3	Fonctions simples (ou fonctions étagées) . . . . .	69
4.3.4	Intégration par rapport à une somme de deux mesures . . . . .	69
4.4	Lien avec l'intégrale de Riemann . . . . .	70
4.5	Intégrale d'une fonction à valeurs complexes . . . . .	72
4.6	Identifier des mesures par leurs intégrales . . . . .	73
4.7	Applications aux intégrales à paramètre . . . . .	74
4.7.1	Continuité d'une intégrale dépendant d'un paramètre . . . . .	74
4.7.2	Dérivabilité d'une intégrale dépendant d'un paramètre . . . . .	75
4.7.3	Exercice : la fonction Gamma . . . . .	75
4.7.4	Holomorphicité d'une intégrale dépendant d'un paramètre . . . . .	79
	Application à la fonction Gamma . . . . .	80
4.8	Mesures à densité . . . . .	82
4.8.1	Définition et premières propriétés . . . . .	82
4.8.2	Décomposition de Lebesgue . . . . .	83
4.9	Le théorème de transfert . . . . .	84
4.10	Mesure produit . . . . .	85
4.10.1	Construction de la mesure produit . . . . .	85
4.10.2	Théorèmes de Fubini et Tonelli . . . . .	87
4.10.3	Associativité de la mesure produit . . . . .	90
4.10.4	Convolution de mesures . . . . .	91
4.11	Théorèmes généraux et mesure de comptage . . . . .	91
4.12	La mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$ . . . . .	92
4.12.1	Transformations affines . . . . .	92
	Un calcul de volume : le volume d'un cône . . . . .	94
4.12.2	Exercice : la fonction Bêta . . . . .	95
4.12.3	Changement de variables $C^1$ . . . . .	97
	Application : calcul de l'intégrale de Gauss . . . . .	97
	Application : mesure image par un $C^1$ -difféomorphisme . . . . .	98
4.12.4	Intégration des fonctions radiales . . . . .	98
4.13	Preuve des propriétés de base de l'intégrale . . . . .	100
4.13.1	Premiers résultats . . . . .	100
4.13.2	Démonstration du théorème de Beppo Levi . . . . .	102
4.13.3	Preuve de la linéarité . . . . .	103
4.14	Exercices sur les intégrales . . . . .	104
4.14.1	Exercices corrigés . . . . .	104
4.14.2	Exercices non corrigés . . . . .	112

<b>5</b>	<b>Lois des variables et des vecteurs aléatoires</b>	<b>117</b>
5.1	Notions générales . . . . .	117
5.1.1	Fonction de répartition . . . . .	118
	Propriétés de la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle . . . . .	118
	Retrouver la loi lorsque la fonction de répartition n'est pas continue . . . . .	120
	Théorème de Helly . . . . .	121
	Exemple : l'ensemble triadique de Cantor . . . . .	122
5.1.2	Tribu engendrée par une ou plusieurs variables aléatoires	125
5.2	Indépendance des variables aléatoires . . . . .	126
5.2.1	Retour sur l'indépendance des tribus . . . . .	127
5.2.2	Vecteurs aléatoires indépendants . . . . .	128
5.2.3	Application : loi 0–1 de Kolmogorov . . . . .	129
5.2.4	Variables aléatoires indépendantes et convolutions . . .	130
5.3	Variables aléatoires discrètes . . . . .	131
5.3.1	Fonction d'une variable aléatoire discrète . . . . .	133
5.4	Variables et vecteurs aléatoires à densité . . . . .	134
5.4.1	Premières propriétés . . . . .	134
5.4.2	Densités et lois marginales . . . . .	134
5.4.3	Indépendance et densités . . . . .	135
5.5	Variables et lois discrètes classiques . . . . .	137
5.5.1	Indicatrice d'un événement . . . . .	137
5.5.2	Mesure de Dirac . . . . .	137
5.5.3	Loi de Bernoulli . . . . .	137
5.5.4	Loi uniforme sur un ensemble . . . . .	137
5.5.5	Loi binomiale . . . . .	138
5.5.6	Loi géométrique . . . . .	139
5.5.7	Loi de Poisson . . . . .	140
5.5.8	Loi hypergéométrique . . . . .	140
5.6	Lois à densité usuelles . . . . .	141
5.6.1	Loi uniforme . . . . .	141
	Loi uniforme sur un compact de $\mathbb{R}^d$ . . . . .	141
	Loi uniforme sur un intervalle . . . . .	141
5.6.2	Loi gaussienne . . . . .	142
5.6.3	Loi exponentielle . . . . .	143
5.6.4	Loi de Cauchy . . . . .	144
5.6.5	Loi Gamma . . . . .	145
5.6.6	Loi Bêta . . . . .	146
5.6.7	Exemple . . . . .	147
5.6.8	Simulation par rejet . . . . .	148
5.7	Loi 0–1 de Hewitt et Savage . . . . .	150

5.7.1	Le théorème de Hewitt et Savage sur l'espace canonique	150
5.7.2	Loi d'un processus	152
5.8	Exercices sur les lois	153
5.8.1	Exercices corrigés	153
5.8.2	Exercices non corrigés	156
<b>6</b>	<b>Espérances et calculs</b>	<b>159</b>
6.1	Rappels sur la construction de l'espérance	159
6.2	Propriétés élémentaires	159
6.3	Application aux inégalités classiques	160
6.3.1	Inégalité de Markov	160
6.3.2	Formule de Poincaré et inégalités de Bonferroni	160
6.3.3	Application de la formule de Poincaré au problème des dérangements	163
6.4	Théorèmes de transfert	164
6.4.1	Calcul de l'espérance d'une variable aléatoire discrète	164
6.4.2	Calcul de l'espérance d'une variable aléatoire à densité	165
6.4.3	Identifier une loi : technique de la fonction test	166
6.5	Convexité	167
6.5.1	Rappels sur la convexité	167
6.5.2	Inégalité de Jensen	169
6.6	Intégrale et queue de distribution	170
6.7	Moments d'ordre 2	171
6.7.1	Covariance et variance	172
6.7.2	Matrice de covariance	174
6.7.3	Espérance et indépendance	175
6.7.4	Inégalité de Chebychev	177
6.8	Lois images par des transformations affines	177
6.8.1	Exemple fondamental	177
6.8.2	Application aux lois gaussiennes	178
6.8.3	Application : convolution de deux lois à densité	179
	Application : $\Gamma(a, \gamma) * \Gamma(b, \gamma) = \Gamma(a + b, \gamma)$	180
6.9	Loi image par un $C^1$ -difféomorphisme	181
6.9.1	Compléments méthodologiques	181
6.9.2	Un exemple : l'algorithme de Box-Muller	185
6.10	Premiers moments des lois discrètes usuelles	186
6.10.1	Indicatrice d'un événement	186
6.10.2	Loi binomiale	186
6.10.3	Loi géométrique	187
6.10.4	Loi de Poisson	187
6.10.5	Loi hypergéométrique	188
6.11	Calcul des moments des lois à densité usuelles	189

6.11.1	Loi uniforme sur un segment . . . . .	189
6.11.2	Loi gaussienne . . . . .	190
6.11.3	Loi Gamma . . . . .	191
6.11.4	Loi exponentielle . . . . .	191
6.11.5	Loi Bêta . . . . .	191
6.11.6	Loi de Cauchy . . . . .	192
6.12	Exercices détaillés . . . . .	192
6.12.1	Loi de Dirichlet . . . . .	192
6.12.2	Polynômes de Bernstein . . . . .	195
6.13	Exercices sur l'espérance . . . . .	196
6.13.1	Exercices corrigés . . . . .	196
6.13.2	Exercices non corrigés . . . . .	204
<b>7</b>	<b>Espaces <math>\mathcal{L}^p</math> et <math>L^p</math></b>	<b>209</b>
7.1	De $\mathcal{L}^p$ à $L^p$ . . . . .	209
7.1.1	Inégalité de Hölder . . . . .	209
7.1.2	Inégalité triangulaire (ou inégalité de Minkowski) . . . . .	211
7.2	Complétude de $L^p$ . . . . .	213
7.3	Théorèmes d'approximation . . . . .	217
7.4	Exercices sur les espaces $L^p$ . . . . .	218
7.4.1	Exercices corrigés . . . . .	218
7.4.2	Exercices non corrigés . . . . .	219
<b>8</b>	<b>Convolution et transformation de Fourier</b>	<b>223</b>
8.1	Produit de convolution . . . . .	223
8.1.1	Convolution dans $\mathcal{L}^1$ . . . . .	224
8.1.2	Autres produits . . . . .	225
8.1.3	Approximations de l'unité . . . . .	226
8.1.4	Régularisation . . . . .	228
8.2	Transformée de Fourier . . . . .	229
8.2.1	Propriétés élémentaires . . . . .	229
8.2.2	Théorème d'inversion . . . . .	231
8.3	Exercices sur la transformation de Fourier . . . . .	232
8.3.1	Exercices corrigés . . . . .	232
8.3.2	Exercices non corrigés . . . . .	232
<b>9</b>	<b>Fonction génératrice et fonction caractéristique, transformée de Laplace</b>	<b>235</b>
9.1	Fonction génératrice d'une variable entière . . . . .	235
9.1.1	Fonction génératrice et indépendance . . . . .	236
9.1.2	Calculs de fonctions génératrices . . . . .	236
	Loi de Bernoulli . . . . .	236

	Loi binomiale . . . . .	236
	Loi géométrique de paramètre $p \in ]0, 1[$ . . . . .	236
	Loi de Poisson . . . . .	237
9.1.3	Fonction génératrice et loi . . . . .	237
9.1.4	Application : convolution de lois de Poisson . . . . .	238
9.1.5	Fonction génératrice et espérance . . . . .	238
9.2	Fonctions caractéristiques . . . . .	238
9.2.1	Motivations . . . . .	238
9.2.2	Propriétés des fonctions caractéristiques . . . . .	241
9.2.3	Fonction caractéristique et indépendance . . . . .	243
9.2.4	Fonction caractéristique et moments . . . . .	244
9.2.5	Fonctions caractéristiques des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ . . . . .	246
9.2.6	Quelques fonctions caractéristiques de mesures à densité	247
	Loi uniforme sur $[a, b]$ . . . . .	247
	Loi exponentielle de paramètre $\lambda$ . . . . .	247
	Variable aléatoire gaussienne . . . . .	248
	Loi de Cauchy . . . . .	249
9.3	Transformée de Laplace . . . . .	251
9.4	Application aux marches aléatoires . . . . .	254
9.4.1	Transience et récurrence . . . . .	254
9.4.2	Marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}^d$ . . . . .	259
9.5	Exercices sur les fonctions caractéristiques . . . . .	260
9.5.1	Exercices corrigés . . . . .	260
9.5.2	Exercices non corrigés . . . . .	262
<b>10</b>	<b>Convergences, lois des grands nombres</b>	<b>265</b>
10.1	Convergence presque sûre . . . . .	265
10.1.1	Rappels d'analyse . . . . .	266
10.1.2	Limites supérieures, inférieures d'ensembles . . . . .	266
10.2	Convergence en probabilité . . . . .	268
10.2.1	Comparaison avec les autres modes de convergence . . . . .	268
	Convergence dans $L^p$ et convergence en probabilité . . . . .	268
	Convergence presque sûre et convergence en probabilité . . . . .	268
10.2.2	Loi faible des grands nombres . . . . .	269
10.3	Lemmes de Borel-Cantelli . . . . .	272
10.3.1	Premier lemme de Borel-Cantelli . . . . .	272
10.3.2	Deuxième lemme de Borel-Cantelli . . . . .	273
10.4	Lois fortes des grands nombres . . . . .	275
10.4.1	Deux lois fortes des grands nombres . . . . .	275
10.4.2	Probabilités et fréquences asymptotiques . . . . .	277
10.4.3	Méthode de Monte-Carlo . . . . .	278

10.4.4 Exercice : une preuve de la loi forte des grands nombres	279
10.5 Exercices sur la convergence presque sûre	285
10.5.1 Exercices corrigés	285
10.5.2 Exercices non corrigés	292
<b>11 Convergence en loi</b>	<b>295</b>
11.1 Convergence en loi	295
11.1.1 Définition	295
11.1.2 Premiers exemples	296
Un critère de convergence en loi	296
Convergence de la loi binomiale vers la loi de Poisson	297
Convergence de la loi hypergéométrique vers la loi binomiale	298
11.1.3 Théorème de Portmanteau	299
11.1.4 Lien avec les autres modes de convergence	304
11.2 Convergence et fonctions caractéristiques	306
11.2.1 Critère de convergence	306
11.2.2 Théorème de continuité de Lévy	306
11.2.3 Une application du théorème de Lévy	307
11.3 Théorème central limite en dimension 1	307
11.4 Preuve des théorèmes de Lévy	309
11.4.1 Tension	309
11.4.2 Théorèmes de Lévy	311
11.5 Exercices sur la convergence en loi	313
11.5.1 Exercices corrigés	313
11.5.2 Exercices non corrigés	317
<b>12 Vecteurs gaussiens</b>	<b>319</b>
12.1 Image affine d'un vecteur gaussien	319
12.2 Exemple fondamental	320
12.3 Loi gaussienne	320
12.4 Loi gaussienne et indépendance	322
12.5 Loi gaussienne à densité	323
12.6 Fonction caractéristique, vecteurs gaussiens	324
12.7 Théorème central limite en dimension $d$	324
12.8 Convergence vers la loi du $\chi^2$	325
12.8.1 Préliminaires	325
12.8.2 Le théorème de convergence	327
12.9 Exercices sur les vecteurs gaussiens	329
12.9.1 Exercices corrigés	329
12.9.2 Exercices non corrigés	330



<b>13</b>	<b>Statistique</b>	<b>333</b>
13.1	Estimateurs . . . . .	335
13.1.1	Lois empiriques . . . . .	335
13.1.2	Théorème de Glivenko–Cantelli . . . . .	337
13.1.3	Choix d’un estimateur . . . . .	339
13.2	Intervalle de confiance . . . . .	343
13.3	Modèles paramétriques (non-bayésiens) . . . . .	347
13.3.1	Maximum de vraisemblance . . . . .	347
13.3.2	Méthode des moments . . . . .	350
13.3.3	Méthode des moindres carrés (régression linéaire) . . .	351
	Méthode 1 : par l’espérance . . . . .	352
	Méthode 2 : par la projection . . . . .	353
13.3.4	Exercice : recherche d’estimateurs . . . . .	354
13.4	Modèles non-paramétriques . . . . .	355
13.4.1	Les tests d’hypothèse du chi-deux . . . . .	355
	Test d’adéquation à une loi . . . . .	357
	Test d’adéquation à une famille de lois . . . . .	359
	Test d’homogénéité . . . . .	360
13.4.2	Les tests de Kolmogorov-Smirnov . . . . .	362
	Test d’adéquation . . . . .	362
	Test d’homogénéité . . . . .	364
13.4.3	Exercice : test du $\chi^2$ . . . . .	364
13.5	Exercices de statistiques . . . . .	367
13.5.1	Exercices corrigés . . . . .	367
13.5.2	Exercices non corrigés . . . . .	368
<b>14</b>	<b>Sommes de variables aléatoires indépendantes</b>	<b>371</b>
14.1	Théorèmes de Lindeberg et de Lyapounov . . . . .	371
14.1.1	Théorème de Lindeberg . . . . .	371
14.1.2	Condition de Lyapounov . . . . .	374
14.2	Sommes et séries de variables indépendantes . . . . .	375
14.2.1	Loi du zéro-un . . . . .	375
14.2.2	Une inégalité maximale . . . . .	375
14.2.3	Lien entre les modes de convergence . . . . .	377
14.2.4	Critères de convergence . . . . .	378
	Convergence $L^2$ . . . . .	378
	Théorème des trois séries . . . . .	379
14.2.5	Inégalité de Hoeffding . . . . .	380
14.3	Grandes déviations . . . . .	382
14.4	Exercices sur les sommes de variables indépendantes . . . . .	389
14.4.1	Exercices corrigés . . . . .	389
14.4.2	Exercices non corrigés . . . . .	391

<b>A</b>	<b>Rappels de dénombrement</b>	<b>393</b>
A.1	Rappels de vocabulaire ensembliste . . . . .	393
A.2	Applications et cardinaux : définitions et notations . . . . .	394
A.3	Principes de base du dénombrement . . . . .	395
A.3.1	Principe de bijection . . . . .	395
A.3.2	Principe d'indépendance . . . . .	395
A.3.3	Principe de partition . . . . .	395
A.3.4	Lemme des bergers . . . . .	396
A.4	Quelques résultats incontournables . . . . .	396
A.4.1	Nombre d'applications de $D$ dans $A$ . . . . .	396
A.4.2	Nombre de permutations de $\Omega$ . . . . .	397
A.4.3	Nombre d'injections de $D$ dans $A$ . . . . .	397
A.4.4	Nombre de parties de $\Omega$ possédant $p$ éléments . . . . .	398
A.4.5	Nombre total de parties de $\Omega$ . . . . .	398
A.5	Équations et inéquations en entiers . . . . .	399
A.6	Formule de Poincaré (aussi appelée formule du crible) . . . . .	400
A.7	Développement d'un produit de sommes . . . . .	401
A.7.1	Développement d'un produit dans un anneau . . . . .	401
A.7.2	Formule du multinôme . . . . .	401
	Calcul des coefficients du multinôme . . . . .	402
A.8	Exercices . . . . .	402
<b>B</b>	<b>Compléments</b>	<b>403</b>
B.1	Équi-intégrabilité . . . . .	403
B.2	Lemme de recouvrement de Vitali . . . . .	406
B.2.1	Lemme de recouvrement de Vitali . . . . .	406
B.2.2	Inégalité maximale de Hardy–Littlewood . . . . .	408
B.2.3	Théorème de différentiation de Lebesgue . . . . .	409
B.3	Régularité des mesures . . . . .	410
B.4	Exercices . . . . .	412
<b>C</b>	<b>Indications des exercices</b>	<b>413</b>
C.1	Solutions sur les compléments . . . . .	413
C.2	Exercices sur la théorie de la mesure . . . . .	415
C.3	Exercices sur le formalisme probabiliste . . . . .	417
C.4	Exercices sur les intégrales . . . . .	420
C.5	Exercices sur les lois . . . . .	426
C.6	Exercices sur les espérances . . . . .	429
C.7	Exercices sur les espaces $L^p$ . . . . .	434
C.8	Exercices sur la convolution et Fourier . . . . .	436
C.9	Exercices sur les fonctions caractéristiques . . . . .	437
C.10	Exercices sur la convergence presque sûre . . . . .	439

C.11 Exercices sur la convergence en loi . . . . .	443
C.12 Exercices sur les vecteurs gaussiens . . . . .	445
C.13 Exercices sur les statistiques . . . . .	446
C.14 Exercices sur les sommes de variables aléatoires indépendantes	447
<b>D Solutions des exercices corrigés</b>	<b>449</b>
D.1 Solutions sur les compléments . . . . .	449
D.2 Exercices sur la théorie de la mesure . . . . .	454
D.3 Exercices sur le formalisme probabiliste . . . . .	460
D.4 Exercices sur les intégrales . . . . .	467
D.5 Exercices sur les lois . . . . .	492
D.6 Exercices sur les espérances . . . . .	500
D.7 Exercices sur les espaces $L^p$ . . . . .	523
D.8 Exercices sur la convolution et Fourier . . . . .	529
D.9 Exercices sur les fonctions caractéristiques . . . . .	532
D.10 Exercices sur la convergence presque sûre . . . . .	537
D.11 Exercices sur la convergence en loi . . . . .	554
D.12 Exercices sur les vecteurs gaussiens . . . . .	564
D.13 Exercices sur les statistiques . . . . .	567
D.14 Exercices sur les sommes de variables aléatoires indépendantes	572
<b>E Tables</b>	<b>579</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>583</b>
<b>Index</b>	<b>587</b>