

Avant-propos

« Pouvez-vous nous conseiller un bon livre en probabilités, qui reprenne bien les bases ? » Cette question, les auteurs de ce livre l'ont entendue de nombreuses fois ! Et pourtant, répondre à la question n'est pas facile, car en réalité, l'expérience montre que les difficultés sont bien plus souvent liées à une défaillance du lien entre le cours d'intégration et ses applications en probabilités, qu'à un défaut de compréhension des probabilités elles-mêmes.

Ainsi avons-nous fait le choix d'écrire un cours complet (intégration, probabilités, statistiques) qui favorise les allers-retours entre l'analyse et les probabilités : évidemment, les résultats d'analyse permettent de construire la théorie des probabilités, mais en retour, la théorie des probabilités fournit des preuves très élégantes, parfois éclairantes, de résultats d'analyse ou de théorie des nombres.

Savoir des mathématiques, c'est d'abord savoir faire des mathématiques. Les étudiants le sentent bien, qui nous réclament bien souvent des exercices corrigés. Ainsi, une large place a-t-elle été consacrée aux exercices : à la fin de chaque chapitre, on trouvera deux séries d'exercices. Pour la première série, les solutions détaillées sont données en fin d'ouvrage. Pour les deux séries, on trouvera, également à la fin, des pistes ou des indications de solution. Outre cela, pour certains chapitres, un ou plusieurs exercices corrigés particulièrement importants sont détaillés dans le chapitre. Les choix des exercices sont très variés, des grands classiques aux créations plus originales, afin de contribuer à la fois à l'acquisition des méthodes et à la progression de la culture mathématique du lecteur.

Tout en gardant la trame d'un cours de Licence classique, nous avons voulu écrire un livre contenant des notions avancées, qui sont habituellement effleurées faute de temps. Disons-le sans détour : le contenu de l'enseignement classique de L3 est trop riche pour être assimilé dans le temps qu'il faut pour valider une quinzaine d'ECTS. Très souvent, nous avons rencontré des étudiants de M1 ou préparant l'agrégation mis en difficulté lorsqu'ils doivent utiliser seuls des notions de base du programme de L3 qu'ils ont insuffisamment pratiquées, ou dont la nature véritable a été masquée par l'emploi de théorèmes sophistiqués. On trouvera dans ce livre peu d'outils théoriques hors du programme de L3, qui reste la référence (pas d'espérance conditionnelle, pas

de chaînes de Markov). Mais tout en restant fidèle à ce corpus, on va souvent un peu plus loin, proposant parfois à côté des théorèmes classiques des extensions plus originales, que le lecteur – et cela lui est clairement signalé – ne doit pas mémoriser en première intention, mais qui lui permettent de voir les notions de base mises en action. Par ailleurs, l'expérience nous a montré qu'un certain nombre de résultats classiques de probabilités sont tombés dans un trou noir pédagogique : plus enseignés en Licence (faute de temps), pas enseignés en M1 (car trop éloignés du corpus traditionnel de M1), ils refont leur apparition en M2 ou en préparation à l'agrégation, où l'enseignant s'étonne de ces lacunes . . . sans avoir toujours le temps de les combler. C'est par exemple le cas des notions de tension ou d'équi-intégrabilité. Aussi ces résultats trouvent-ils naturellement refuge dans cet ouvrage.

Remerciements. Les auteurs tiennent à remercier leurs relecteurs : Gilles Auriol, Aurélien Deya, Jean-Sébastien Giet, Jean-Baptiste Gouéré, Samuel Herrmann, Dominique Lépingle, Emmanuel Lesigne, Régine Marchand, Joseph Ngatchou-Wandji, Ivan Nourdin, Hervé Queffelec, Karim Ramdani, Bernard Roynette, Charles Suquet et Samy Tindel, qui ont fait un travail formidable. Un immense merci à Bernard Roynette qui s'est acquitté de la lourde tâche de relire la totalité du manuscrit avec une incroyable rapidité et nous a fait part de ses nombreuses remarques constructives. Merci également à Monique Pontier qui a su nous donner très vite une référence utile, là où plus d'une personne consultée avait séché . . .

Enfin, il est impossible au premier auteur de cet ouvrage de terminer l'écriture d'un livre sur les bases de l'intégration et des probabilités sans avoir une pensée affectueuse pour Raymond Moché qui lui en a transmis le goût par ses cours, tout à la fois limpides et exigeants.

Sur la deuxième édition. La deuxième édition a bénéficié des retours de nombreux lecteurs, nos étudiants bien sûr, mais également les forumers du site <http://www.les-mathematiques.net/>. Nous remercions particulièrement Éloi Mehr et Nicolas Schaeffer, qui ont non seulement débusqué un nombre impressionnant de coquilles, mais nous ont aussi fait des suggestions d'amélioration tout à fait pertinentes. Ainsi quelques théorèmes admis dans la première édition ont-ils pu être prouvés sans faire grossir le corpus central. Dans la partie analyse, les principales nouveautés concernent le calcul de volumes d'une part, la fonction Gamma et les fonctions spéciales associées d'autre part. Pour les probabilités, on a accordé une plus grande importance aux simulations et à la méthode de Monte-Carlo dans le cours, ainsi qu'à la distribution Zêta dans les exercices, ce qui donne lieu à des applications à la théorie des nombres, qui, nous l'espérons, enthousiasmeront le lecteur. De manière générale, l'essentiel de l'accroissement du volume provient des exercices, car progresser en mathématiques, c'est d'abord les pratiquer. Ainsi, on trouvera ici plus de 300 exercices dont plus de 150 sont corrigés.