

# Chapitre 4

## Intégrales

Jusqu'ici, nous n'avons parlé que de mesures et nullement d'intégrales. Le présent chapitre va combler cette lacune.

Nous commençons par donner la définition de l'intégrale dite « de Lebesgue »<sup>1</sup> et en énoncer les propriétés fondamentales. Afin de se concentrer sur la pratique, certains résultats seront admis dans un premier temps et démontrés à la fin du chapitre.

### 4.1 Définition de l'intégrale et propriétés de base

#### 4.1.1 Définition

Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  un espace mesuré. Pour toute fonction mesurable positive  $f$ , on définit l'intégrale de  $f$ , notée  $\int f \, d\mu$  ou encore  $\int f(x) \, d\mu(x)$  par

$$\int f \, d\mu = \sup \sum_i \inf\{f(\omega); \omega \in \Omega_i\} \mu(\Omega_i), \quad (4.1)$$

où le supremum porte sur toutes les partitions mesurables finies de  $\Omega$ , c'est-à-dire les partitions  $(\Omega_i)_{i \in I}$  que l'on peut indexer par un ensemble fini  $I$  et telles que pour tout  $i \in I$ ,  $\Omega_i \in \mathcal{F}$ . Observons que cette quantité peut être infinie.

Lorsque  $f$  prend des valeurs négatives, on écrit  $f$  comme différence de deux fonctions positives :

$$f = f^+ - f^-, \text{ où } f^+(\omega) = \max(f(\omega), 0) \text{ et } f^-(\omega) = \max(-f(\omega), 0).$$

**Définition.** Lorsque  $\int f^+ \, d\mu$  et  $\int f^- \, d\mu$  sont simultanément finies, on dit que  $f$

---

1. Henri Lebesgue (1875-1941) est un mathématicien français. Il a soutenu sa thèse *Intégrale, longueur, aire* en 1902, pendant qu'il était professeur de lycée à Nancy.

est intégrable et on peut définir

$$\int f \, d\mu = \int f^+ \, d\mu - \int f^- \, d\mu.$$

Lorsque  $\int f^+ \, d\mu$  et  $\int f^- \, d\mu$  sont, l'une finie, l'autre infinie, on s'autorise toutefois à écrire

- $\int f \, d\mu = +\infty$  si  $\int f^+ \, d\mu = +\infty$  et  $\int f^- \, d\mu < +\infty$ .
- $\int f \, d\mu = -\infty$  si  $\int f^+ \, d\mu < +\infty$  et  $\int f^- \, d\mu = +\infty$ .

### 4.1.2 Propriétés de base de l'intégrale

**Définition.** On dit qu'une propriété  $\mathcal{P}$  relative aux points de  $\Omega$  est vérifiée  $\mu$ -presque partout s'il existe  $E$  mesurable avec  $\mu(E) = 0$  tel que pour tout  $x \in \Omega \setminus E$ ,  $\mathcal{P}(x)$  est vérifiée. Au lieu de  $\mu$ -presque partout, nous écrirons parfois  $\mu$ -p.p.

On donne d'emblée sans démonstration les propriétés de base de l'intégrale :

— **Lien avec la mesure :**

Pour tout ensemble  $A$  mesurable, on a  $\int \mathbb{1}_A \, d\mu = \mu(A)$ .

— **Positivité :**

Si  $f$  et  $g$  sont intégrables avec  $f \leq g$   $\mu$ -presque partout, alors on a  $\int f \, d\mu \leq \int g \, d\mu$ , avec égalité si et seulement si  $f = g$   $\mu$ -presque partout. En particulier, si  $f \geq 0$   $\mu$ -presque partout et  $\int f \, d\mu = 0$ , alors  $f = 0$   $\mu$ -presque partout.

— **Linéarité :**

Si  $f$  et  $g$  sont intégrables,  $\alpha$  et  $\beta$  des réels, alors

$$\int \alpha f + \beta g \, d\mu = \alpha \int f \, d\mu + \beta \int g \, d\mu.$$

— **Convergence monotone (ou théorème de Beppo Levi<sup>2</sup>) :**

Si  $(f_n)_{n \geq 1}$  est une suite croissante de fonctions mesurables positives convergeant presque partout vers  $f$ , alors la suite  $(\int f_n \, d\mu)$  converge vers  $\int f \, d\mu$  (la limite peut être infinie).

L'objectif prioritaire du lecteur est, nous semble-t-il, d'acquérir une bonne familiarité des propriétés de cette nouvelle intégrale. Aussi, afin de ne pas laisser par des preuves un peu techniques qui arriveraient avant que l'intérêt de l'outil soit réellement compris, nous reportons les preuves à une section ultérieure qui viendra en fin de chapitre.

**Remarque 4.1.** Pour définir l'intégrale (4.1), la mesurabilité de  $f$  n'est nullement requise, ce qui peut laisser perplexé. Cependant, pour que l'intégrale jouisse

---

2. Beppo Levi (1875-1961) est un mathématicien italien. Pas de trait d'union donc entre Beppo et Levi!

des propriétés intéressantes que nous venons d'énoncer, l'hypothèse de mesurabilité va servir, comme le constateront les courageux lecteurs de la dernière section. De plus, dans la pratique, nous n'intégrons que des fonctions mesurables.

### 4.1.3 Les grands théorèmes : lemme de Fatou et convergence dominée

**Théorème 4.2** (Lemme de Fatou<sup>3</sup>). *Pour toute suite  $(f_n)_{n \geq 1}$  de fonctions mesurables positives, on a*

$$\int \liminf_{n \rightarrow +\infty} f_n \, d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int f_n \, d\mu.$$

*Démonstration.* Il suffit de poser  $g_n = \inf_{k \geq n} f_k$ . La suite  $(g_n)_{n \geq 1}$  est une suite

croissante, dont la limite est, par définition,  $g = \lim_{n \rightarrow +\infty} g_n = \liminf_{n \rightarrow +\infty} f_n$ . On a pour tout  $n$

$$f_n \geq g_n \quad \text{et donc} \quad \int f_n \, d\mu \geq \int g_n \, d\mu.$$

D'où

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \int f_n \, d\mu \geq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int g_n \, d\mu.$$

Mais d'après le théorème de convergence monotone  $\int g_n \, d\mu$  converge vers  $\int g \, d\mu$ , ce qui est le résultat voulu. Dans cette inégalité, les termes peuvent valoir  $+\infty$ .  $\square$

**Théorème 4.3** (Convergence dominée). *Si  $(f_n)_{n \geq 1}$  est une suite de fonctions mesurables convergeant presque partout vers  $f$ , et telle qu'il existe une fonction  $g$  intégrable vérifiant pour tout  $n$ ,  $|f_n| \leq g$  alors la suite  $(\int f_n \, d\mu)$  converge vers  $\int f \, d\mu$ .*

*Démonstration.* Les  $f_n$  sont intégrables car dominées par  $g$ . Par suite, les fonctions  $g + f_n$  et  $g - f_n$  sont intégrables et positives : on peut leur appliquer le lemme de Fatou, ce qui donne

$$\int \liminf_{n \rightarrow +\infty} (g + f_n) \, d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int (g + f_n) \, d\mu$$

et

$$\int \liminf_{n \rightarrow +\infty} (g - f_n) \, d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int (g - f_n) \, d\mu$$

---

3. Mathématicien français (1878-1929). Avec sa thèse, *Séries trigonométriques et séries de Taylor*, c'est un des premiers utilisateurs de la théorie de l'intégration de Lebesgue.

soit

$$\int g \, d\mu + \int f \, d\mu \leq \int g \, d\mu + \lim_{n \rightarrow +\infty} \int f_n \, d\mu$$

et

$$\int g \, d\mu - \int f \, d\mu \leq \int g \, d\mu - \lim_{n \rightarrow +\infty} \int f_n \, d\mu.$$

Comme  $|\int g \, d\mu| < +\infty$ , on peut simplifier et on obtient

$$\int f \, d\mu \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \int f_n \, d\mu$$

et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int f_n \, d\mu \leq \int f \, d\mu$$

ce qui montre le résultat voulu.  $\square$

## 4.2 Intégration sur un ensemble

Pour tout ensemble mesurable  $A$  et toute fonction intégrable (ou positive)  $f$ , on note

$$\int_A f \, d\mu = \int f \mathbb{1}_A \, d\mu.$$

**Théorème 4.4.** Si  $f$  est intégrable et si  $(A_n)_{n \geq 1}$  est une partition dénombrable mesurable de  $\Omega$ , alors

$$\int f \, d\mu = \sum_{k=1}^{+\infty} \int_{A_k} f \, d\mu.$$

*Démonstration.* On pose  $f_n = f \times \mathbb{1}_{\bigcup_{k=1}^n A_k} = f \times \left( \sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{A_k} \right)$  et on applique

le théorème de convergence dominée.  $\square$

## 4.3 Quelques cas particuliers importants

### 4.3.1 Intégration par rapport à une masse de Dirac

**Théorème 4.5.** Soit  $(\Omega, \mathcal{F})$  un espace mesurable. On suppose que le singleton  $\{x\}$  est dans  $\mathcal{F}$ . Alors, pour toute fonction  $f$  mesurable, on a

$$\int_{\Omega} f \, d\delta_x = f(x).$$

*Démonstration.* Par linéarité, comme  $f = f^+ - f^-$ , il suffit de traiter le cas où  $f$  est positive. Soit  $(\Omega_i)_{i \in I}$  une partition mesurable finie. Posons  $\mu = \delta_x$ . Pour tout  $i \in I$ , on a

$$\mu(\Omega_i) \inf_{\Omega_i} f \leq \mu(\Omega_i) f(x).$$

En effet, si  $x \notin \Omega_i$ , les deux membres de l'égalité sont nuls. Sinon l'inégalité  $\inf_{\Omega_i} f \leq f(x)$  est une conséquence de  $x \in \Omega_i$ . En faisant la somme sur  $i \in I$ , on obtient

$$\sum_{i \in I} \mu(\Omega_i) \inf_{\Omega_i} f \leq \left( \sum_{i \in I} \mu(\Omega_i) \right) f(x) = f(x),$$

d'où en passant au supremum sur toutes les partitions  $\int f d\mu \leq f(x)$ . Cependant, si l'on prend  $I = \{1, 2\}$ ,  $\Omega_1 = \{x\}$  et  $\Omega_2 = \{x\}^c$ , on a

$$\sum_{i \in I} \mu(\Omega_i) \inf_{\Omega_i} f = f(x),$$

d'où l'égalité voulue. □

### 4.3.2 Intégration par rapport à la mesure de comptage

**Théorème 4.6.** *Soit  $\Omega$  un ensemble dénombrable. On note  $C$  la mesure de comptage sur  $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ . Toute fonction définie sur  $\Omega$  est mesurable. Pour toute fonction  $f$  positive, on a*

$$\int_{\Omega} f(\omega) dC(\omega) = \sum_{k \in \Omega} f(k),$$

où cette somme peut valoir  $+\infty$ . Dans le cas général,  $f$  est intégrable si et seulement si  $\sum_{k \in \Omega} |f(k)| < +\infty$  et dans ce cas, on a encore l'égalité ci-dessus.

*Démonstration.* Soient  $f$  positive et  $(\Omega_i)_{i \in I}$  une partition mesurable finie de  $\Omega$ . On a

$$\begin{aligned} C(\Omega_i) \inf_{\Omega_i} f &= \sum_{k \in \Omega} \left( \mathbb{1}_{\Omega_i}(k) \inf_{\Omega_i} f \right) \\ &\leq \sum_{k \in \Omega} (\mathbb{1}_{\Omega_i}(k) f(k)). \end{aligned}$$

D'où en sommant sur  $I$

$$\sum_{i \in I} C(\Omega_i) \inf_{\Omega_i} f \leq \sum_{i \in I} \sum_{k \in \Omega} (\mathbb{1}_{\Omega_i}(k) f(k)).$$

Cependant, par le théorème de Fubini, on a

$$\sum_{i \in I} \sum_{k \in \Omega} (\mathbb{1}_{\Omega_i}(k) f(k)) = \sum_{k \in \Omega} \left( \sum_{i \in I} \mathbb{1}_{\Omega_i}(k) f(k) \right) = \sum_{k \in \Omega} f(k)$$

d'où en passant au supremum

$$\int_{\Omega} f(\omega) dC(\omega) \leq \sum_{k \in \Omega} f(k).$$

Réciproquement soit  $F$  une partie finie de  $\Omega$ . On considère la partition de cardinal  $|F| + 1$ , formée des  $|F|$  singletons de  $F$  et de  $F^c$  : elle donne lieu à une somme

$$\sum_{k \in F} f(k) + |F^c| \inf_{F^c} f \geq \sum_{k \in F} f(k).$$

On en déduit

$$\int_{\Omega} f(\omega) dC(\omega) \geq \sum_{k \in F} f(k).$$

En prenant la borne supérieure sur toutes les parties finies de  $\Omega$ , on obtient

$$\int_{\Omega} f(\omega) dC(\omega) \geq \sum_{k \in \Omega} f(k),$$

d'où l'égalité voulue. Dans le cas où  $f$  est de signe quelconque, la formule précédente appliquée à  $|f|$  donne

$$\int_{\Omega} |f(\omega)| dC(\omega) = \sum_{k \in \Omega} |f(k)|.$$

Dans le cas où la dernière somme est finie, en appliquant cette fois la formule à  $f^+$  et  $f^-$ , on a

$$\int_{\Omega} f^+(\omega) dC(\omega) = \sum_{k \in \Omega} f^+(k)$$

et

$$\int_{\Omega} f^-(\omega) dC(\omega) = \sum_{k \in \Omega} f^-(k).$$

Ces deux quantités sont finies car  $f^+ \leq |f|$  et  $f^- \leq |f|$  : en faisant la différence, on obtient alors par linéarité

$$\int_{\Omega} f(\omega) dC(\omega) = \sum_{k \in \Omega} f(k).$$

□

### 4.3.3 Fonctions simples (ou fonctions étagées)

**Définition.** On appelle fonction simple, ou fonction étagée, toute combinaison linéaire d'indicatrices d'ensembles mesurables.

On peut dire aussi qu'une fonction simple est une fonction mesurable qui ne prend qu'un nombre fini de valeurs.

**Lemme 4.7.** Toute fonction mesurable positive  $f$  (éventuellement infinie) peut s'écrire comme limite simple d'une suite croissante de fonctions simples  $(f_n)$ .

*Démonstration.* Il est naturel de chercher  $f_n$  sous la forme  $f_n = \phi_n \circ f$ , où  $\phi_n$  est une suite croissante de fonctions qui convergent ponctuellement vers l'identité, chaque fonction  $f_n$  ne prenant qu'un nombre fini de valeurs. On définit sur  $[0, +\infty]$  une fonction  $\phi_n$  par

$$\phi_n(x) = 2^{-n} \lfloor 2^n x \rfloor \mathbb{1}_{[0, n]}(x) \text{ pour } x < +\infty \text{ et } \phi_n(+\infty) = n.$$

La prise de la partie entière d'un multiple, suivie d'une division, est classique dans l'approximation par des rationnels. Plus originale, l'intervention des  $2^n$  est, on le verra, destinée à assurer la monotonie. Évidemment la suite  $(\phi_n(\infty))_{n \geq 1}$  tend en croissant vers  $+\infty$ . Soit  $x \geq 0$ . Il est immédiat que  $\mathbb{1}_{[0, n+1]}(x) \geq \mathbb{1}_{[0, n]}(x)$ . Posons  $y = 2^n x$ . On a  $y \geq \lfloor y \rfloor$ , donc  $2y \geq 2\lfloor y \rfloor$ . Comme  $2\lfloor y \rfloor$  est entier, on a aussi  $\lfloor 2y \rfloor \geq 2\lfloor y \rfloor$ , ce qui nous donne finalement  $\phi_{n+1}(x) \geq \phi_n(x)$ . D'autre part pour  $n \geq x$ , on a  $x - 2^{-n} \leq \phi_n(x) \leq x$ , donc  $\phi_n(x)$  tend vers  $x$ . Il suffit alors de poser  $f_n(x) = \phi_n(f(x))$ .  $\square$

**Remarque 4.8.** On peut montrer que la convergence précédente est uniforme lorsque  $f$  est bornée.

### 4.3.4 Intégration par rapport à une somme de deux mesures

**Théorème 4.9.** Soient  $(\Omega, \mathcal{F})$  un espace mesurable,  $\mu$  et  $\nu$  deux mesures sur  $(\Omega, \mathcal{F})$ . Soit  $f$  une fonction  $(\Omega, \mathcal{F})$ - $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  mesurable positive. On a

$$\int_{\Omega} f d(\mu + \nu) = \int_{\Omega} f d\mu + \int_{\Omega} f d\nu. \quad (4.2)$$

Dans le cas où  $f$  est de signe quelconque, si  $\int_{\Omega} |f| d\mu$  et  $\int_{\Omega} |f| d\nu$  sont finies, alors  $f$  est intégrable par rapport à  $\mu + \nu$  et on a encore (4.2).

*Démonstration.* Dans le cas où  $f$  est l'indicatrice d'un élément de  $\mathcal{F}$ , l'identité (4.2) découle de la définition de la mesure somme de deux mesures et de la valeur de l'intégrale d'une indicatrice. Par linéarité, la formule (4.2) est encore vraie si  $f$  est une combinaison linéaire d'indicatrices d'éléments de  $\mathcal{F}$ , autrement dit une fonction simple. En utilisant le lemme 4.7 et le théorème de convergence monotone, il s'ensuit que l'identité (4.2) est vraie pour

toute fonction mesurable positive. Comme précédemment, le cas général s'en déduit en séparant partie positive et partie négative.  $\square$

## 4.4 Lien avec l'intégrale de Riemann

On a ici  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ .

**Théorème 4.10.** *Soit  $f$  une fonction continue par morceaux sur un intervalle compact  $[a, b]$ . Alors*

$$\int_{[a,b]} f(x) d\lambda(x) = \int_a^b f(t) dt.$$

*Ainsi, on a identité entre les intégrales de Lebesgue (à gauche) et Riemann (à droite) pour les fonctions continues par morceaux sur un intervalle compact.*

*Démonstration.* Grâce à la relation de Chasles et la linéarité de l'intégrale de Lebesgue, on peut se ramener au cas où  $f$  est continue sur  $[a, b]$ . Posons

$$f_n(x) = f\left(a + \frac{b-a}{n} \lfloor \frac{n(x-a)}{b-a} \rfloor\right).$$

Comme  $f$  est continue sur  $[a, b]$ , son module est borné par une constante  $M$ . Comme  $f$  est continue sur  $[a, b]$ ,  $f_n(x)$  converge vers  $f(x)$  pour tout  $x \in [a, b]$ . Comme  $|f_n| \leq M\mathbb{1}_{[a,b]}$ , le théorème de convergence dominée assure que  $\int_{[a,b]} f_n(x) d\lambda(x)$  converge vers  $\int_{[a,b]} f(x) d\lambda(x)$ . Cependant

$$\int_{[a,b]} f_n(x) d\lambda(x) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right).$$

On reconnaît une somme de Riemann qui converge vers  $\int_a^b f(x) dx$ . Finalement,  $\int_{[a,b]} f(x) d\lambda(x) = \int_a^b f(t) dt$ .  $\square$

**Théorème 4.11.** *Soit  $f$  une fonction positive continue par morceaux sur un intervalle semi-ouvert  $[a, b[$  ( $b$  peut valoir  $+\infty$ ). Alors l'intégrale impropre  $\int_a^b f(t) dt$  est convergente si et seulement si  $\int_{[a,b[} f(x) d\lambda(x) < +\infty$ . Dans ce cas*

$$\int_{[a,b[} f(x) d\lambda(x) = \int_a^b f(t) dt.$$

*Démonstration.* Soit  $(b_n)$  une suite de réels de  $[a, b[$  tendant vers  $b$ . La suite  $(f\mathbb{1}_{[a,b_n]})$  converge en croissant vers  $f\mathbb{1}_{[a,b[}$ , donc d'après le théorème de convergence monotone,  $\int_{[a,b[} f(x) d\lambda(x) < +\infty$  est la limite de  $\int_{[a,b_n]} f(x) d\lambda(x)$ . Par définition d'une intégrale impropre,  $\int_a^b f(t) dt$  est la limite de  $\int_a^{b_n} f(t) dt$ , si elle est finie. Comme  $\int_{[a,b_n]} f(x) d\lambda(x) = \int_a^{b_n} f(t) dt$ , le résultat s'ensuit.  $\square$



**Théorème 4.12.** Soit  $f$  une fonction continue par morceaux sur un intervalle semi-ouvert  $[a, b[$  ( $b$  peut valoir  $+\infty$ ). Alors  $f$  est intégrable sur  $[a, b[$  par rapport à la mesure de Lebesgue si et seulement si l'intégrale impropre  $\int_a^b |f(t)| dt$  est convergente. Dans ce cas

$$\int_{[a,b[} f(x) d\lambda(x) = \int_a^b f(t) dt.$$

*Démonstration.* Dire que  $f$  est intégrable sur  $[a, b[$  par rapport à la mesure de Lebesgue revient à dire que  $\int_{[a,b[} |f(x)| d\lambda(x) < +\infty$ . Le premier point découle donc du théorème précédent. Soit  $(b_n)$  une suite de réels de  $[a, b[$  tendant vers  $b$ . La suite  $(f\mathbb{1}_{[a,b_n]})$  converge vers  $f\mathbb{1}_{[a,b[}$  et  $|f\mathbb{1}_{[a,b_n]}| \leq |f|$ , donc d'après le théorème de convergence dominée  $\int_{[a,b[} f(x) d\lambda(x)$  est la limite de  $\int_{[a,b_n]} f(x) d\lambda(x)$ , c'est-à-dire la limite de  $\int_a^{b_n} f(x) dx$ , qui est  $\int_a^b f(x) dx$ , par définition d'une intégrale impropre.  $\square$

**Remarque 4.13.** Il est important de remarquer que la convergence de l'intégrale impropre  $\int_a^b f(x) dx$  n'entraîne PAS l'intégrabilité de  $f$ .

Ainsi, on verra en exercice que l'intégrale de 0 à  $+\infty$  de  $\frac{\sin x}{x}$  est une intégrale de Riemann impropre convergente. Cependant,  $\frac{\sin x}{x}$  n'est pas intégrable sur  $\mathbb{R}_+$  pour la mesure de Lebesgue.

À titre culturel, on peut noter le résultat suivant dû à Lebesgue :

**Théorème 4.14.** Soit  $f$  une fonction mesurable et bornée sur un intervalle  $[a, b]$ . Alors  $f$  est Riemann-intégrable sur  $[a, b]$  si et seulement si l'ensemble des points de discontinuité de  $f$  est de mesure de Lebesgue nulle.

*Démonstration.* On va se contenter de démontrer que si l'ensemble des points de discontinuité de  $f$  est de mesure de Lebesgue nulle, alors  $f$  est Riemann-intégrable sur  $[a, b]$ , c'est-à-dire que si on a

$$a = a_0^n \leq x_0^n \leq a_1^n \leq x_1^n \leq \dots \leq x_{n-1}^n \leq a_n^n = b,$$

et que la suite  $e_n = \max_{1 \leq i \leq n} (a_i^n - a_{i-1}^n)$  est de limite nulle, alors la suite

$S_n = \sum_{k=1}^n (a_k - a_{k-1})f(x_{k-1})$  converge toujours vers une même limite ne dépendant pas des subdivisions choisies. On procède comme dans la preuve du théorème 4.10 : soit  $M$  une constante bornant  $f$  sur  $[a, b]$ .

Si l'on pose  $f_n = \sum_{i=1}^n f(x_{i-1}^n)\mathbb{1}_{]a_{i-1}^n, a_i^n[}$ , alors  $f_n$  converge vers  $f$  en les points de continuité de  $f$ , donc presque partout. Comme  $|f_n| \leq M$ , le théorème de convergence dominée s'applique et  $S_n = \int_{[a,b]} f_n d\lambda$  converge vers  $\int_{[a,b]} f d\lambda$ .  $\square$

Ce résultat illustre bien la supériorité de l'intégrale de Lebesgue sur l'intégrale de Riemann. Pour vous en convaincre, essayez donc de montrer, à l'aide de la seule définition de la Riemann-intégrabilité, la convergence des sommes de Riemann associées à la fonction  $x \mapsto \{\frac{1}{x}\}$  sur  $]0, 1]$ . (La valeur de l'intégrale sera calculée en exercice.)

Terminons par quelques remarques élémentaires : l'intérêt de l'intégrale de Riemann, c'est qu'on a appris (dans certains cas) à la calculer ! Plus précisément, le théorème fondamental de l'analyse nous enseigne que si  $F$  est une primitive de  $f$  sur  $[a, b]$  (c'est-à-dire si  $F' = f$ ), alors

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx.$$

En particulier, si  $\phi$  est une fonction monotone strictement croissante, la dérivée de  $F \circ \phi$  est  $\phi' \cdot (f \circ \phi)$ , ce qui nous dit que  $F \circ \phi$  est une primitive de  $\phi' \cdot (f \circ \phi)$ , et donc

$$\int_a^b \phi'(x) \cdot (f \circ \phi)(x) dx = F(\phi(b)) - F(\phi(a)) = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x) dx.$$

C'est la formule dite "de changement de variable".

## 4.5 Intégrale d'une fonction à valeurs complexes

**Définition.** Soient  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  un espace mesuré et  $f$  une fonction de  $\Omega$  dans  $\mathbb{C}$ . On dit que  $f$  est mesurable sur  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  si ses parties réelle et imaginaire le sont. On dit que  $f$  est intégrable sur  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  si ses parties réelle et imaginaire le sont. Ainsi si  $f$  s'écrit  $f = f_1 + if_2$  où  $f_1$  et  $f_2$  sont des fonctions à valeurs réelles mesurables, on peut définir  $\int_{\Omega} f d\mu$  par

$$\int_{\Omega} f d\mu = \left( \int_{\Omega} f_1 d\mu \right) + i \left( \int_{\Omega} f_2 d\mu \right).$$

Il n'est alors pas très difficile de voir que les fonctions intégrables sur  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  à valeurs dans  $\mathbb{C}$  forment un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel et que l'intégrale ainsi définie est  $\mathbb{C}$ -linéaire. Quelles que soient les fonctions complexes intégrables sur  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  et quels que soient  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ , on a

$$\int_{\Omega} (\alpha f + \beta g) d\mu = \alpha \int_{\Omega} f d\mu + \beta \int_{\Omega} g d\mu.$$

Si l'on sait que  $f$  est mesurable (c'est-à-dire que la partie réelle  $f_1$  et la partie imaginaire  $f_2$  de  $f$  le sont), alors comme pour tout  $i \in \{1, 2\}$ ,

$$|f_i| \leq |f| \leq |f_1| + |f_2|,$$

$f$  sera intégrable si et seulement si  $|f|$  l'est.

Enfin, il sera souvent utile de connaître le résultat suivant : si  $a$  et  $b$  sont des nombres réels avec  $a < b$  et  $z$  un nombre complexe non nul, on a

$$\int_{[a,b]} e^{zx} d\lambda(x) = \frac{e^{bz} - e^{az}}{z}.$$

Dans la suite, la plupart des théorèmes seront énoncés pour des fonctions à valeurs réelles, mais dans le cas de fonctions à valeurs complexes, on pourra souvent démontrer un résultat analogue en considérant séparément les parties réelle et imaginaire.

Par exemple, on peut énoncer :

**Théorème 4.15** (Convergence dominée pour des fonctions complexes). *Si  $(f_n)_{n \geq 1}$  est une suite de fonctions mesurables complexes convergeant presque partout vers  $f$ , et telle qu'il existe une fonction  $g$  intégrable vérifiant, pour tout  $n$ ,  $|f_n| \leq g$  alors la suite  $(\int f_n d\mu)_{n \geq 1}$  converge vers  $\int f d\mu$ .*

*Démonstration.* Comme  $|\operatorname{Re} f_n| \leq |f_n| \leq g$ , on peut appliquer le théorème de convergence dominée à  $(\operatorname{Re} f_n)_{n \geq 1}$ . Idem pour  $(\operatorname{Im} f_n)_{n \geq 1}$ .  $\square$

Le théorème “évident” suivant mérite tout de même une démonstration :

**Théorème 4.16.** *si  $f$  est une fonction complexe intégrable sur  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ , alors*

$$\left| \int_{\Omega} f d\mu \right| \leq \int_{\Omega} |f| d\mu.$$

*Démonstration.* Soit  $a \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left( a \int_{\Omega} f d\mu \right) &= \operatorname{Re} \left( \int_{\Omega} af d\mu \right) = \int_{\Omega} \operatorname{Re} af d\mu \\ &\leq \int_{\Omega} |af| d\mu = |a| \int_{\Omega} |f| d\mu \end{aligned}$$

Si on prend  $a = \overline{\int_{\Omega} f d\mu}$ , on obtient

$$\left| \int_{\Omega} f d\mu \right|^2 \leq \left| \int_{\Omega} f d\mu \right| \int_{\Omega} |f| d\mu,$$

ce qui donne le résultat voulu.  $\square$

## 4.6 Identifier des mesures par leurs intégrales

Les intégrales caractérisent des mesures.

**Théorème 4.17.** *Soit  $\mu$  et  $\nu$  deux mesures sur  $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$  qui donnent chacune une masse finie aux compacts de  $\mathbb{R}^d$ . On suppose que pour toute fonction continue à support compact  $f$ , on a  $\int_{\mathbb{R}^d} f d\mu = \int_{\mathbb{R}^d} f d\nu$ . Alors  $\mu = \nu$ .*

*Démonstration.* Les compacts de  $\mathbb{R}^d$  forment un  $\pi$ -système qui engendre la tribu borélienne de  $\mathbb{R}^d$  (par exemple car les pavés ouverts s'écrivent comme réunion dénombrable de pavés compacts), donc il suffit de montrer que  $\mu$  et  $\nu$  coïncident sur les compacts. Soit  $f_n$  la fonction de  $\mathbb{R}_+$  dans  $\mathbb{R}_+$  définie par  $f_n(x) = (1 - nx)^+$ .  $f$  est continue, vaut 1 en 0 et est nulle sur  $[1/n, +\infty[$ . Soit  $K$  un compact de  $\mathbb{R}^d$ , et posons  $g_n(x) = f_n(d(x, K))$ , où  $d(x, K) = \inf d(x, y)$ ;  $y \in K$ .  $g_n$  est continue, comme composition d'applications continues, et converge simplement vers l'indicatrice de  $K$ . Comme  $|g_n| \leq \mathbb{1}_{K+\overline{B}(0,1)}$  qui est intégrable par rapport à  $\mu$  et  $\nu$ , le théorème de convergence dominée dit que  $\int_{\mathbb{R}^d} g_n d\mu$  converge vers  $\int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_K d\mu = \mu(K)$  et  $\int_{\mathbb{R}^d} g_n d\nu$  vers  $\int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_K d\nu = \nu(K)$ . Vu l'hypothèse faite,  $\int_{\mathbb{R}^d} g_n d\mu = \int_{\mathbb{R}^d} g_n d\nu$  pour tout  $n$ , donc  $\mu(K) = \nu(K)$ . Comme  $\mu$  et  $\nu$  coïncident sur les compacts, on a donc bien  $\mu = \nu$ .  $\square$

## 4.7 Applications aux intégrales à paramètre

### 4.7.1 Continuité d'une intégrale dépendant d'un paramètre

**Théorème 4.18.** *Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  un espace mesuré. Soit  $f(x, t)$  une fonction (à valeurs réelles) de deux variables définie sur  $\Omega \times T$ , où  $T$  est un espace métrique. On suppose que pour tout  $t \in T$ , la fonction  $x \mapsto f(x, t)$  est mesurable par rapport à  $\mathcal{F}$ . On suppose qu'il existe une fonction  $g$  intégrable par rapport à  $\mu$  telle que pour tout  $t \in T$  :*

$$|f(x, t)| \leq g(x) \quad \mu - p.p.$$

*On suppose enfin que, pour  $\mu$ -presque tout  $x$ ,  $t \mapsto f(x, t)$  est continue. Alors*

$$F(t) = \int_{\Omega} f(x, t) d\mu(x)$$

*définit une fonction continue sur  $T$ .*

*Démonstration.* Que  $F$  soit bien définie découle de l'inégalité  $|f(x, t)| \leq g(x)$  et de l'intégrabilité de  $g$ . Soit  $t \in T$ . Comme  $T$  est un espace métrique, la continuité est caractérisée par le comportement des suites : pour montrer que  $F$  est continue en  $t \in T$ , il suffit de montrer que pour toute suite  $(t_n)_{n \geq 1}$  d'éléments de  $T$  convergeant vers  $t$ ,  $F(t_n)$  tend vers  $F(t)$ . Pour cela, il suffit d'appliquer le théorème de convergence dominée à la suite  $(f_n)$  définie par  $f_n(x) = f(x, t_n)$  : pour  $\mu$ -presque tout  $x$ ,  $f_n(x)$  converge vers  $f(x, t)$  grâce à la continuité de  $t \mapsto f(x, t)$  et on a la domination  $|f_n| \leq g$ .  $\square$

### 4.7.2 Dérivabilité d'une intégrale dépendant d'un paramètre

**Théorème 4.19.** Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  un espace mesuré. Soit  $f(x, t)$  une fonction de deux variables définie sur  $\Omega \times T$ , où  $T$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$ . On suppose que pour tout  $t \in T$ , la fonction  $x \mapsto f(x, t)$  est mesurable par rapport à  $\mathcal{F}$  et intégrable par rapport à  $\mu$ . On suppose enfin que, pour  $\mu$ -presque tout  $x$ ,  $t \mapsto f(x, t)$  est dérivable par rapport à  $t$ , et qu'il existe une fonction  $g$  intégrable par rapport à  $\mu$  telle que pour tout  $t \in T$  :

$$\left| \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) \right| \leq g(x) \mu - p.p.$$

Alors

$$F(t) = \int_{\Omega} f(x, t) d\mu(x)$$

définit une fonction dérivable sur  $T$ , avec

$$F'(t) = \int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) d\mu(x).$$

*Démonstration.* Il s'agit de montrer que pour toute suite  $(t_n)$  de points de  $T$  tendant vers  $t$ ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{F(t_n) - F(t)}{t_n - t} = \int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) d\mu(x).$$

Posons  $f_n(x) = \frac{f(x, t_n) - f(x, t)}{t_n - t}$ .

La suite de fonctions mesurables  $(f_n)_{n \geq 1}$  converge  $\mu$ -presque partout vers  $\frac{\partial f}{\partial t}(x, t)$ , ce qui assure la mesurabilité de  $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial t}(x, t)$ . De plus, d'après l'inégalité des accroissements finis, on a  $|f_n(x)| \leq g(x)$   $\mu$ -presque partout. Ainsi, d'après le théorème de convergence dominée,  $\int_{\Omega} f_n d\mu$  converge vers l'intégrale  $\int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) d\mu(x)$ . Cependant  $\int_{\Omega} f_n d\mu = \frac{F(t_n) - F(t)}{t_n - t}$ , ce qui donne donc le résultat voulu.  $\square$

**Remarque 4.20** (importante). Lorsque l'on veut démontrer la continuité (ou la dérivabilité) de  $F(t)$  définie comme précédemment sur un intervalle  $T$  non compact, il est rare que l'on trouve une fonction majorante  $g$  qui convienne pour TOUTES les valeurs de  $T$ . Cependant, comme la continuité (ou la dérivabilité) est une propriété locale, il suffit de montrer que pour tout  $t \in T$ , il existe un voisinage  $\mathcal{V}$  de  $t$  tel que l'on ait une majoration uniforme pour les  $t \in \mathcal{V}$ .

### 4.7.3 Exercice : la fonction Gamma

On note  $\Gamma$  la fonction définie sur  $]0, +\infty[$  par la relation

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt.$$

Pour  $n$  entier naturel non nul, on pose

$$H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

1. Vérifier que  $\Gamma$  est bien définie.
2. Démontrer que la fonction  $\Gamma$  est dérivable sur  $]0, +\infty[$ , avec

$$\forall x > 0 \quad \Gamma'(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} \log t \, dt.$$

3. Montrer que la suite  $(u_n)_{n \geq 1}$  définie par  $u_n = H_n - \log n$  admet une limite lorsque  $n$  tend vers l'infini. On notera  $\gamma$  cette limite, appelée constante d'Euler.
4. Montrer que pour tout entier  $n \geq 1$ ,  $H_n = \int_0^1 \frac{1-(1-v)^n}{v} \, dv$ .
5. En déduire que, pour tout entier naturel  $n \geq 1$ ,

$$\frac{H_{n+1}}{n+1} = - \int_0^1 (1-v)^n \log v \, dv.$$

6. Établir que pour tout  $t \geq 0$ ,  $1-t \leq e^{-t}$ .
7. On pose  $I_n = \int_0^n (1 - \frac{t}{n})^n \log t \, dt$ . Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = \int_0^{+\infty} e^{-t} \log t \, dt.$$

8. Montrer que  $\gamma = -\Gamma'(1)$ .  
Indication : on pourra montrer que  $I_n = \frac{n}{n+1}(\log n - H_{n+1})$ .

### Solution

1. La fonction  $t \mapsto e^{-t} t^{x-1}$  est continue sur  $]0, +\infty[$ , donc localement intégrable sur  $]0, +\infty[$ . Reste à étudier l'intégrabilité en 0 et en l'infini. En 0,  $e^{-t} t^{x-1} \sim t^{x-1}$ , et comme  $x-1 > -1$  et que  $t^{x-1}$  est de signe constant au voisinage de 0, l'intégrabilité en 0 découle du critère d'équivalence avec une intégrale "de type Riemann" classique. En l'infini,  $e^{-t} t^{x-1} = o(e^{-t/2})$ , ce qui donne la convergence en l'infini.
2. Soient  $a, b$  réels avec  $0 < a < b < +\infty$ . Pour tout  $t > 0$ , on a

$$\frac{\partial}{\partial x} (e^{-t} t^{x-1}) = e^{-t} t^{x-1} \log t.$$

Comme pour tout  $t > 0$  et tout  $x \in ]a, b[$ , on a

$$\begin{aligned} |e^{-t} t^{x-1} \log t| &= (-\log t) e^{-t} t^{x-1} \mathbb{1}_{]0,1[}(t) + e^{-t} t^{x-1} \log t \mathbb{1}_{[1,+\infty[}(t) \\ &\leq (-\log t) e^{-t} t^{a-1} \mathbb{1}_{]0,1[}(t) + e^{-t} t^{b-1} \log t \mathbb{1}_{[1,+\infty[}(t), \end{aligned}$$

on pourra appliquer le théorème de dérivation sous le signe intégrale dès qu'il sera acquis que

$$t \mapsto (-\log t)e^{-t}t^{a-1} \mathbb{1}_{]0,1[}(t) + e^{-t}t^{b-1} \log t \mathbb{1}_{[1,+\infty[}(t)$$

est intégrable sur  $]0, +\infty[$ .

— Cette fonction est continue, donc localement intégrable.

— En 0, on a  $\log t = o(t^{-a/2})$  et  $e^{-t} \sim 1$ , d'où la relation de comparaison  $(-\log t)e^{-t}t^{a-1} = o(t^{a/2-1})$ , ce qui donne l'intégrabilité en 0.

— En  $+\infty$ , comme  $\log t = o(t)$ , on a  $e^{-t}t^{b-1} \log t = o(e^{-t}t^b)$ , mais  $t^b = o(e^{t/2})$ , donc finalement  $e^{-t}t^{b-1} \log t = o(e^{-t/2})$ , ce qui donne l'intégrabilité en l'infini.

Ainsi, la fonction  $\Gamma$  est dérivable sur  $]a, b[$ , avec

$$\forall x \in ]a, b[ \quad \Gamma'(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1} \log t \, d\lambda(t).$$

Comme la dérivabilité est une propriété locale et que tout point de  $]0, +\infty[$  admet un voisinage de la forme  $]a, b[$ , avec  $a, b$  réels vérifiant  $0 < a < b < +\infty$ , le résultat s'ensuit.

3. On a le comportement suivant

$$\begin{aligned} |u_n - u_{n-1}| &= |(H_n - H_{n-1}) - (\log n - \log(n-1))| \\ &= \left| \frac{1}{n} + \log(1 - 1/n) \right| = \left| \frac{1}{n} - \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right| = O\left(\frac{1}{n^2}\right). \end{aligned}$$

Ainsi la série de terme général  $u_n - u_{n-1}$  converge, mais on a la relation télescopique  $\sum_{k=2}^n (u_k - u_{k-1}) = u_n - u_1$ , donc la suite  $(u_n)_{n \geq 1}$  converge.

4. Pour tout  $v \in ]0, 1[$ , on a en posant  $u = 1 - v$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1 - (1-v)^n}{v} \, dv &= \int_0^1 \frac{1 - u^n}{1-u} \, du = \int_0^1 \left( \sum_{k=0}^{n-1} u^k \right) \, du \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^1 u^k \, du = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1} = H_n. \end{aligned}$$

5. On fait une intégration par parties : pour tout  $\varepsilon > 0$ , on a

$$\begin{aligned} &\int_{\varepsilon}^1 (1-v)^n \log v \, dv \\ &= \left[ \frac{1 - (1-v)^{n+1}}{n+1} \log v \right]_{\varepsilon}^1 - \frac{1}{n+1} \int_{\varepsilon}^1 \frac{1 - (1-v)^{n+1}}{v} \, dv \\ &= -\frac{1 - (1-\varepsilon)^{n+1}}{n+1} \log \varepsilon - \frac{1}{n+1} \int_{\varepsilon}^1 \frac{1 - (1-v)^{n+1}}{v} \, dv \end{aligned}$$

Cependant, on a l'équivalent en 0 :  $-\frac{1-(1-\varepsilon)^{n+1}}{n+1} \log \varepsilon \sim -\varepsilon \log \varepsilon$ , d'où en faisant tendre  $\varepsilon$  vers 0 :

$$\int_0^1 (1-v)^n \log v \, dv = -\frac{1}{n+1} \int_0^1 \frac{1-(1-v)^{n+1}}{v} \, dv = -\frac{H_{n+1}}{n+1}$$

grâce à la question précédente.

6. La fonction  $t \mapsto f(t) = 1 - e^{-t}$  a comme dérivée  $e^{-t}$ , majorée par 1 sur  $\mathbb{R}_+$ . D'après l'inégalité des accroissements finis, on a  $f(t) - f(0) \leq t$ , d'où l'inégalité voulue.
7. Posons, pour  $t > 0$  et  $n \geq 1$ ,  $f_n(t) = (1 - \frac{t}{n})^n (\log t) \mathbb{1}_{[0,n]}(t)$ . Comme  $f_n$  est continue par morceaux, on a

$$\int_{]0,+\infty[} f_n(x) \, d\lambda(x) = \int_{]0,n]} f_n(x) \, d\lambda(x) = \int_0^n f_n(t) \, dt = I_n.$$

Pour  $n \geq t$ , on a  $f_n(t) = (1 - \frac{t}{n})^n \log t$ .

Mais  $(1 - \frac{t}{n})^n = \exp(\log(1 - \frac{t}{n})^n) = \exp(n \log(1 - t/n))$  : lorsque  $n$  tend vers l'infini  $\log(1 - t/n) \sim -t/n$ , d'où  $n \log(1 - t/n) \sim -t$ . Ainsi,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \log(1 - t/n) = -t, \text{ d'où } \lim_{n \rightarrow +\infty} (1 - t/n)^n = e^{-t}. \text{ Finalement,}$$

pour tout  $t > 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t) = e^{-t} \log t$ .

On a pour  $t$  compris entre 0 et  $n$

$$\left| \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \log t \right| \leq (e^{-t/n})^n |\log t| = |\log t| e^{-t},$$

d'où  $|f_n(t)| \leq |\log t| e^{-t}$ . La dernière inégalité est encore vérifiée pour  $t > n$  : les termes sont tous nuls. Ainsi, on a sur  $]0, +\infty[$  l'inégalité  $|f_n(t)| \leq |\log t| e^{-t}$ . Comme, on l'a vu au 2, cette fonction est intégrable, on peut alors appliquer le théorème de convergence dominée et on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = \int_0^{+\infty} e^{-t} \log t \, dt.$$

8. Un simple changement de variable affine donne

$$\begin{aligned} \int_0^n f_n(t) \, dt &= n \int_0^1 f_n(ny) \, dy = n \int_0^1 (1-y)^n \log(ny) \, dy. \\ &= n \log n \int_0^1 (1-y)^n \, dy + n \int_0^1 (1-y)^n \log y \, dy. \\ &= \frac{n \log n}{n+1} - n \frac{H_{n+1}}{n+1}, \end{aligned}$$

soit  $I_n = \frac{n}{n+1} (\log n - H_{n+1}) = \frac{n}{n+1} (\log n - H_n - \frac{1}{n+1})$ .



Comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (H_n - \log n) = \gamma$ , cela nous donne  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = -\gamma$ .

Or, d'après la question précédente,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = \int_0^{+\infty} e^{-t} \log t \, dt$ , qui

d'après la question 2, est égale à  $\Gamma'(1)$ .

On obtient donc l'identité  $\gamma = -\Gamma'(1)$ .

#### 4.7.4 Holomorphie d'une intégrale dépendant d'un paramètre

*Cette sous-section peut être omise sans dommage par un lecteur non-familier de l'analyse complexe.*

**Théorème 4.21.** Soient  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  un espace mesuré et  $O$  un ouvert de  $\mathbb{C}$ . Soit  $f(x, z)$  une fonction de deux variables définie sur  $\Omega \times O$ . On suppose que pour tout  $z \in O$ , la fonction  $x \mapsto f(x, z)$  est mesurable par rapport à  $\mathcal{F}$ . On suppose que pour tout compact  $K$  inclus dans  $O$ , il existe une fonction  $g_K$  intégrable par rapport à  $\mu$  telle que pour tout  $z \in K$ .

$$|f(x, z)| \leq g_K(x) \mu - p.p.$$

On suppose enfin que, pour  $\mu$ -presque tout  $x$ ,  $z \mapsto f(x, z)$  est holomorphe.

Alors  $F(z) = \int_{\Omega} f(x, z) \, d\mu(x)$  définit une fonction holomorphe sur  $O$  avec

$$\forall n \geq 1 \quad F^{(n)}(z) = \int_{\Omega} \frac{\partial^n f}{\partial z^n}(x, z) \, d\mu(x).$$

Remarquons que le contrôle repose sur  $f(x, z)$ , et non pas sur sa dérivée. Si l'on laisse de côté l'argument standard de localisation, la preuve ressemble beaucoup à la preuve du théorème précédent, mais il y a un petit miracle lié à l'holomorphie : grâce aux inégalités de Cauchy, majorer localement  $f(x, z)$  permet de majorer localement  $\frac{\partial f}{\partial z}(x, z)$ .

*Démonstration.* Commençons par un argument d'analyse complexe. Montrons que pour tout  $n \geq 1$  et pour tout compact  $K$  inclus dans  $O$ , il existe une fonction  $g_{n,K}$  intégrable par rapport à  $\mu$  telle que

$$\forall z \in K \quad \left| \frac{\partial^n f}{\partial z^n}(x, z) \right| \leq g_{n,K}(x) \mu - p.p.$$

Vu ce résultat, il suffira alors de montrer la formule pour  $n = 1$ , le résultat général venant aisément par récurrence.

Soit  $K$  un compact,  $n \geq 1$ . Un raisonnement classique de compacité donne l'existence d'un  $r > 0$  tel que  $K + \overline{B}(0, r) \subset O$  (où  $\overline{B}(0, r)$  est la boule fermée centrée en l'origine de rayon  $r$ ). Notons que  $K + \overline{B}(0, r) \subset O$  est également un compact. Pour tout  $z$  dans  $K$ , on a, pour  $\mu$ -presque tout  $x$ , l'identité

$$\frac{\partial^n}{\partial z^n} f(x, z) = \frac{n!}{2i\pi} \int_{C(z,r)} \frac{f(x, z')}{(z' - z)^{n+1}} \, dz' = \frac{n!}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(x, z + re^{i\theta}) e^{-in\theta} \, d\theta.$$

Ainsi  $|\frac{\partial^n}{\partial z^n} f(x, z)| \leq \frac{n!}{r^n} g_{K+\overline{B}(0,r)}(x)$ , ce qui donne le résultat voulu en prenant comme fonction majorante  $g_{n,K} = n!r^{-n}g_{K+\overline{B}(0,r)}$ .

Passons maintenant à la preuve de l'identité et de la formule pour  $n = 1$ . Soit  $z_0 \in O$ . Prenons  $r$  tel que la boule fermée de centre  $z_0$  et de rayon  $r$  soit incluse dans  $O$ . On prend  $K = \overline{B}(z_0, r)$ .

Posons  $F_{\theta,x}(r) = f(x, z_0 + re^{i\theta})$ . On a, pour  $\mu$ -presque tout  $x$ , l'égalité (vectorielle)

$$F_{\theta,x}(r) - F_{\theta,x}(0) = \int_0^r F'_{\theta,x}(u) du,$$

soit

$$\frac{f(x, z_0 + re^{i\theta}) - f(x, z_0)}{re^{i\theta}} = \frac{1}{r} \int_0^r \frac{\partial}{\partial z} f(x, z_0 + ue^{i\theta}) du.$$

Ainsi pour tout  $z$  tel que  $|z - z_0| \leq r$ , on a

$$\left| \frac{f(x, z) - f(x, z_0)}{z - z_0} \right| \leq \sup_{z \in \overline{B}(z_0, r)} \left| \frac{\partial}{\partial z} f(x, z) \right| \leq g_{1, \overline{B}(z_0, r)}(x) \mu - \text{p.p.}$$

On conclut alors comme précédemment avec le théorème de convergence dominée et une suite  $(z_n)$  quelconque de limite  $z_0$  (à partir d'un certain rang, elle prend ses valeurs dans  $K$ ). On peut remarquer que la fin de la preuve est presque identique à la preuve du théorème de dérivation sous le signe intégrale, à la différence près qu'on a redémontré "à la main" l'inégalité des accroissements dans le cadre du  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $\mathbb{C}$ .  $\square$

### Application à la fonction Gamma

**Théorème 4.22.** *La fonction  $\Gamma$*

$$z \mapsto \int_{[0, +\infty[} t^{z-1} e^{-t} d\lambda(t)$$

*définit une fonction holomorphe sur  $\{a + ib; (a, b) \in ]0, +\infty[ \times \mathbb{R}\}$ . Ses dérivées sont données par*

$$\Gamma^{(n)}(z) = \int_{[0, +\infty[} (\log t)^n t^{z-1} e^{-t} d\lambda(t)$$

*Elle vérifie la relation fonctionnelle  $\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z)$ , ce qui permet de la prolonger en une fonction holomorphe sur  $\mathbb{C} \setminus \{-n; n \in \mathbb{N}\}$ .*

*Démonstration.* On prend  $O = \{a + ib; (a, b) \in ]0, +\infty[ \times \mathbb{R}\}$ . Soit  $K$  un compact inclus dans  $O$ . On pose  $a(K) = \inf\{\operatorname{Re}(z); z \in K\}$ . Comme  $z \mapsto \operatorname{Re}(z)$  est continue, l'infimum est atteint et on a  $a(K) > 0$ .

On pose maintenant  $M(K) = \sup\{\operatorname{Re}(z); z \in K\}$ , puis on considère la fonction  $g_K(x) = t^{a(K)-1}e^{-t} + t^{M(K)-1}e^{-t}$ . On a déjà vu dans l'exercice sur la

fonction Gamma réelle que  $g_K$  était intégrable, et on a pour tout  $z \in K$  et tout  $t > 0$  :

$$|t^{z-1}e^{-t}| \leq g_K(t).$$

Avec le théorème précédent, cela nous donne l'holomorphie de la fonction Gamma complexe. Pour  $z \in O$ , une intégration par parties donne

$$\int_0^M e^{-t} t^z dt = [-t^z e^{-t}]_0^M + z \int_0^M e^{-t} t^{z-1} dt,$$

d'où  $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$  en faisant tendre  $M$  vers l'infini.

Posons  $\Gamma_0(z) = \Gamma(z)$ , puis pour  $k \geq 0$ ,  $\Gamma_{k+1}(z) = \frac{\Gamma_k(z+1)}{z}$ .

On montre aisément par récurrence que  $\Gamma_k$  définit une fonction holomorphe sur  $H_k = \{a + ib; a > -k\} \setminus \{0; -1; -2; \dots; -k\}$ . De manière explicite, on a sur  $H_k$  :

$$\Gamma_k(z) = \frac{\Gamma(z+k)}{(z+k-1)(z+k-2)\dots z}.$$

Cependant pour  $z$  dans  $H_k$ , on a encore pour tout entier naturel non nul  $\ell$  :

$$\begin{aligned} \Gamma_{k+\ell}(z) &= \frac{\Gamma(z+k)(z+k)(z+1)\dots(z+k+\ell-1)}{(z+k+\ell-1)\dots z} = \frac{\Gamma(z+k)}{(z+k-1)\dots z} \\ &= \Gamma_k(z). \end{aligned}$$

Finalement, les fonctions  $\Gamma_k$  coïncident et définissent une fonction holomorphe sur  $\cup_{k \geq 1} H_k = \mathbb{C} \setminus \{-n; n \in \mathbb{N}\}$ .  $\square$

Les conséquences sont aussi intéressantes dans le domaine réel : on en déduit directement que la restriction de  $\Gamma$  à  $]0, +\infty[$  est  $C^\infty$ , avec l'expression des dérivées. En particulier, pour tout  $x > 0$

$$\Gamma''(x) = \int_{]0, +\infty[} (\log t)^2 t^{x-1} e^{-t} d\lambda(t) > 0,$$

et  $\Gamma$  est donc strictement convexe sur  $]0, +\infty[$ , et  $\Gamma'$  est strictement croissante. Comme  $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$ ,  $\Gamma'$  s'annule en un unique point  $c$  de  $]1, 2[$  :  $\Gamma$  est strictement décroissante sur  $]0, c[$ , et strictement croissante sur  $]c, +\infty[$ .

Comme  $\Gamma(n+1) = n!$ , on a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \Gamma(x) = +\infty$ . L'inégalité  $\Gamma(x) \geq \int_0^1 t^{x-1} e^{-t} dt \geq \frac{1}{e^x}$  donne  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \Gamma(x) = +\infty$ .

**Exercice.** Posons  $\phi(z) = \int_{\mathbb{R}_+} \frac{e^{-x}}{x-z} d\lambda(x)$  et montrons que  $\phi$  est holomorphe sur  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ . Soit  $K$  un compact de  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$  : la fonction  $z \mapsto d(z, \mathbb{R}_+)$  est continue sur  $K$ , donc y atteint son minimum, noté  $\varepsilon_K$ . Comme  $K$  ne rencontre pas  $\mathbb{R}_+$ , on a  $\varepsilon_K > 0$ . On peut donc appliquer le théorème avec  $g_K(x) = \frac{e^{-x}}{\varepsilon_K}$ . Il s'agit en fait de la transformée de Stieltjes de la fonction  $e^{-x}$ .

## 4.8 Mesures à densité

### 4.8.1 Définition et premières propriétés

Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  un espace mesuré. Soit  $f$  une fonction positive mesurable de  $(\Omega, \mathcal{F})$  dans  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ . On peut définir une application  $\nu$  de  $(\Omega, \mathcal{F})$  dans  $[0, +\infty]$  par

$$\nu(A) = \int_A f \, d\mu.$$

Il n'est pas difficile de démontrer que  $\nu$  est une mesure sur  $(\Omega, \mathcal{F})$  (exercice laissé au lecteur). On note parfois  $f.\mu$  la mesure ainsi définie.

**Définition.** On dit que  $\nu$  est une mesure qui admet une densité par rapport à  $\mu$  et que cette densité est  $f$ .

En réalité, il y a ici un abus de langage : en effet, une même mesure ne peut-elle admettre plusieurs densités par rapport à  $\mu$  ?

**Proposition 4.23.** Soit  $\nu$  une mesure  $\sigma$ -finie. Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions mesurables étant toutes deux des densités de  $\nu$  par rapport à  $\mu$ . Alors  $f = g$   $\mu$ -presque partout.

*Démonstration.* Supposons d'abord  $\nu$  finie. Posons  $A_+ = \{\omega : f(\omega) > g(\omega)\}$ .

On a  $0 = \nu(A_+) - \nu(A_+) = \int_{A_+} f \, d\mu - \int_{A_+} g \, d\mu = \int_{A_+} (f - g) \, d\mu$ .

De même si l'on pose  $A_- = \{\omega : f(\omega) < g(\omega)\}$ , on a encore la relation  $0 = \nu(A_-) - \nu(A_-) = \int_{A_-} f \, d\mu - \int_{A_-} g \, d\mu = \int_{A_-} (f - g) \, d\mu$ . Cependant  $|f - g| = (f - g)\mathbb{1}_{A_+} - (f - g)\mathbb{1}_{A_-}$ , donc

$$\begin{aligned} \int |f - g| \, d\mu &= \int (f - g) \mathbb{1}_{A_+} \, d\mu - \int (f - g) \mathbb{1}_{A_-} \, d\mu \\ &= \int_{A_+} (f - g) \, d\mu - \int_{A_-} (f - g) \, d\mu = 0 - 0 = 0. \end{aligned}$$

Ce qui implique que  $f = g$   $\mu$ -presque partout.

Cas général : on pose  $\nu_n(A) = \nu(A \cap \Omega_n)$ , où  $(\Omega_n)$  est une suite croissante d'ensembles de mesure finie de réunion  $\Omega$ .  $\nu_n$  est une mesure finie et admet les densités  $f\mathbb{1}_{\Omega_n}$  et  $g\mathbb{1}_{\Omega_n}$  qui coïncident donc  $\mu$ -presque partout :

on a  $f\mathbb{1}_{\Omega_n} = g\mathbb{1}_{\Omega_n}$   $\mu$ -presque partout, et à la limite  $f = g$   $\mu$ -p.p.  $\square$

**Théorème 4.24.** On suppose que  $\nu$  est une mesure admettant  $f$  comme densité par rapport à  $\mu$ . Alors, pour toute fonction mesurable  $g$

$$\int |g| \, d\nu = \int |g|f \, d\mu. \quad (4.3)$$

Si cette quantité est finie, on a alors

$$\int g \, d\nu = \int gf \, d\mu. \quad (4.4)$$

*Démonstration.* Si  $g = \mathbb{1}_A$  avec  $A \in \mathcal{F}$ , (4.4) est immédiat. Par linéarité, (4.4) est également vérifiée lorsque  $g$  est une fonction simple positive. En utilisant le lemme 4.7 et le théorème de convergence monotone, il s'ensuit que (4.4) est vraie pour toute fonction mesurable positive, en particulier (4.3) est vraie pour toute fonction mesurable  $g$ . Supposons que  $\int |g| d\nu = \int |g|f d\mu < +\infty$  : on peut alors écrire  $g = g^+ - g^-$  avec  $\int g^+ d\nu < +\infty$  et  $\int g^- d\nu < +\infty$ . Comme  $g^+$  et  $g^-$  sont mesurables positives, on a  $\int g^+ d\nu = \int g^+ f d\mu$  et  $\int g^- d\nu = \int g^- f d\mu$ . En faisant la différence des deux, on obtient donc l'égalité  $\int (g^+ - g^-) d\nu = \int (g^+ - g^-)f d\mu$ , soit (4.4).  $\square$

## 4.8.2 Décomposition de Lebesgue

**Définition.** On dit que la mesure  $\mu$  est une mesure absolument continue par rapport à  $\lambda$ , ce qui est noté  $\mu \ll \lambda$ , si pour tout borélien  $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ , on a :  $\lambda(A) = 0$  implique  $\mu(A) = 0$ . On dit que la mesure  $\nu$  est une mesure singulière par rapport à  $\lambda$ , ce que l'on note  $\nu \perp \lambda$ , s'il existe  $N \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$  tel que  $\lambda(N) = 0$  et  $\nu(N^c) = 0$ .

**Remarque 4.25.** Un tel borélien  $N$  n'est pas nécessairement unique.

**Théorème 4.26.** Toute mesure  $\sigma$ -finie  $\mu$  sur  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  se décompose de façon unique sous la forme  $\mu = \nu_1 + \nu_2$ , où  $\nu_1$  est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue  $\lambda$  et  $\nu_2$  est singulière par rapport à  $\lambda$ .

*Démonstration.* Montrons tout d'abord l'existence d'une telle décomposition. Considérons l'ensemble des négligeables pour la mesure  $\lambda$  :

$$\mathcal{N} = \{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}); \lambda(A) = 0\}.$$

Posons  $\alpha = \sup\{\mu(A); A \in \mathcal{N}\}$ . Si  $\alpha = 0$ , alors  $\mu = \nu_1$  et il n'y a rien à démontrer. Supposons donc  $\alpha > 0$ . Dans ce cas, il existe une suite croissante  $(A_n)$  d'éléments de  $\mathcal{N}$  telle que  $\mu(A_n) \geq \alpha - \frac{1}{n}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ . Ainsi, l'ensemble  $A = \cup_{n \geq 1} A_n \in \mathcal{N}$  vérifie  $\mu(A) = \alpha$ . Soit maintenant  $B \subset A^c$  tel que  $\lambda(B) = 0$ . On se demande s'il est possible d'avoir  $\mu(B) > 0$ . On sait que  $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) \geq \alpha$  et  $A \cup B \in \mathcal{N}$  donc  $\mu(A \cup B) \leq \alpha$ . On voit donc que nécessairement  $\mu(B) = 0$ . Posons maintenant  $\nu_1 = \mathbb{1}_{A^c} \mu$  et  $\nu_2 = \mathbb{1}_A \mu$ . La mesure  $\nu_1$  admet la densité  $\mathbb{1}_{A^c}$  par rapport à  $\mu$ . On a

$$\nu_1(B) = \int_B \mathbb{1}_{A^c} d\mu = \int \mathbb{1}_{A^c} \mathbb{1}_B d\mu = \int \mathbb{1}_{A^c \cap B} d\mu = \mu(A^c \cap B).$$

Ainsi, si  $B$  est tel que  $\lambda(B) = 0$ , alors  $\nu_1(B) = \mu(A^c \cap B) = 0$  et donc  $\nu_1 \ll \lambda$ . On remarque de plus que  $\lambda(A^c) = 0$  et  $\nu_2(A^c) = \mu(A \cap A^c) = 0$ . Donc  $\nu_2$  est bien singulière par rapport à  $\lambda$ .

Pour montrer l'unicité de la décomposition, supposons que  $\mu = \nu'_1 + \nu'_2$ , avec  $\nu'_1 \ll \lambda$  et  $\nu'_2 \perp \lambda$ . Choisissons donc des ensembles  $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$  tels que

$\nu_2(A) = \lambda(A^c) = \nu'_2(B) = \lambda(B^c) = 0$ . On a alors

$$\nu_2(A \cap B) = \nu'_2(A \cap B) = \nu_1(A^c \cup B^c) = \nu'_1(A^c \cup B^c) = 0.$$

Donc  $\nu_1 = \mathbb{1}_{A \cap B}$   $\nu_1 = \mathbb{1}_{A \cap B}$   $\mu = \mathbb{1}_{A \cap B}$   $\nu'_1 = \nu'_1$  et  $\nu_2 = \mu - \nu_1 = \mu - \nu'_1 = \nu'_2$ .  $\square$

**Remarque 4.27.** En réalité, on peut dire un peu plus : la mesure  $\nu_1$  apparaissant dans la décomposition du théorème admet une densité par rapport à la mesure de Lebesgue. Ce résultat constitue le théorème de Radon-Nikodým. Ce résultat, que nous ne démontrerons pas ici, peut être établi à l'aide de techniques hilbertiennes (voir par exemple Rudin [36]).

## 4.9 Intégration par rapport à une mesure image : le théorème de transfert

Le théorème qui suit est un résultat très utile, dont la portée n'est malheureusement pas toujours bien comprise. Dans un certain sens, on peut considérer que c'est ce théorème qui légitime l'introduction du concept de mesure image, puisqu'il exprime que dès lors qu'on sait décrire la mesure image  $\mu_T$ , on saura calculer les intégrales de fonctions de la forme  $f \circ T$ . C'est en probabilités que son intérêt est le plus évident ; sa maîtrise est un objectif important d'un cours de probabilités de ce niveau. En analyse, ce théorème permet de calculer certaines intégrales avec une redoutable efficacité, voir par exemple la preuve du calcul du volume de la boule unité que nous proposons en fin de ce chapitre.

**Théorème 4.28.** Soient  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  un espace mesuré,  $T$  une application mesurable de  $(\Omega, \mathcal{F})$  dans  $(\Omega', \mathcal{F}')$ . Soit  $f$  une application mesurable de  $(\Omega', \mathcal{F}')$  dans  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ . Alors  $f$  est intégrable par rapport à  $\mu_T$  si et seulement si  $f \circ T$  est intégrable par rapport à  $\mu$ . Dans ce cas, on a

$$\int_{\Omega'} f(y) d\mu_T(y) = \int_{\Omega} (f \circ T)(x) d\mu(x). \quad (4.5)$$

*Démonstration.* Prenons d'abord le cas où  $f$  est l'indicatrice d'un ensemble  $A \in \mathcal{F}'$  : on a  $\int_{\Omega'} f d\mu_T = \int_{\Omega'} \mathbb{1}_A d\mu_T = \mu_T(A) = \mu(T^{-1}(A))$ . D'autre part on a  $\mathbb{1}_A \circ T = \mathbb{1}_{T^{-1}(A)}$ , donc  $\int_{\Omega} f \circ T d\mu = \int_{\Omega} \mathbb{1}_{T^{-1}(A)} d\mu = \mu(T^{-1}(A))$ . L'égalité (4.5) est donc vérifiée dans le cas où  $f$  est l'indicatrice d'un ensemble  $A \in \mathcal{F}'$ . Par linéarité, elle est vérifiée pour toute fonction étagée mesurable.

Soit maintenant  $f$  une application mesurable positive de  $(\Omega', \mathcal{F}')$  dans  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ . Il existe une suite croissante d'applications étagées  $(f_n)$  convergeant ponctuellement vers  $f$ . Pour tout  $n$ , on a

$$\int_{\Omega'} f_n(y) d\mu_T(y) = \int_{\Omega} (f_n \circ T)(x) d\mu(x).$$

En appliquant le théorème de convergence monotone, on obtient à la limite  $\int_{\Omega'} f(y) d\mu_T(y) = \int_{\Omega} (f \circ T)(x) d\mu(x)$ . En particulier, pour toute application  $f$  mesurable de  $(\Omega', \mathcal{F}')$  dans  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ , on a  $\int_{\Omega'} |f| d\mu_T = \int_{\Omega} |f| \circ T d\mu$ , ce qui montre bien que  $f$  est intégrable par rapport à  $\mu_T$  si et seulement si  $f \circ T$  est intégrable par rapport à  $\mu$ . Dans ce cas,  $f^+$  et  $f^-$  sont intégrables, positives, et en soustrayant l'identité  $\int_{\Omega'} f^-(y) d\mu_T(y) = \int_{\Omega} f^- \circ T(x) d\mu(x)$  de l'identité  $\int_{\Omega'} f^+(y) d\mu_T(y) = \int_{\Omega} f^+ \circ T(x) d\mu(x)$ , on obtient le résultat voulu.  $\square$

## 4.10 Mesure produit

L'introduction de la notion de mesure produit vise plusieurs buts :

- donner un sens mathématique à la notion intuitive d'aire dans  $\mathbb{R}^2$ , ou de volume dans  $\mathbb{R}^3$ ,
- permettre le calcul d'intégrales de plusieurs variables,
- introduire un cadre mathématique qui permettra, dans un contexte probabiliste, de manier efficacement la notion d'indépendance.

On suppose que  $(X, \mathcal{X}, \mu)$  et  $(Y, \mathcal{Y}, \nu)$  sont des espaces mesurés. On rappelle que  $\mathcal{X} \otimes \mathcal{Y}$  est la tribu engendrée par les ensembles de type  $X \times Y$ , où  $(X, Y)$  décrit  $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ .

### 4.10.1 Construction de la mesure produit

**Lemme 4.29.** *Pour tout  $A \in \mathcal{X} \otimes \mathcal{Y}$ ,  $x \in X$  et  $y \in Y$ , on note*

$$A_x = \{y \in Y : (x, y) \in A\} \quad \text{et} \quad A^y = \{x \in X : (x, y) \in A\}.$$

*Alors  $A_x \in \mathcal{Y}$  et  $A^y \in \mathcal{X}$ . De plus, si  $f$  est une fonction mesurable de  $(X \times Y, \mathcal{X} \otimes \mathcal{Y})$  vers  $(C, \mathcal{C})$ , alors pour chaque  $x$  fixé, la fonction  $y \mapsto f(x, y)$  est mesurable par rapport à la tribu  $\mathcal{Y}$ , et de même pour chaque  $y$  fixé la fonction  $x \mapsto f(x, y)$  est mesurable par rapport à la tribu  $\mathcal{X}$ .*

*Démonstration.* On va commencer par montrer la deuxième assertion. Fixons  $x \in X$  et montrons que  $f_x^1 : y \mapsto f(x, y)$  est  $(Y, \mathcal{Y}) - (C, \mathcal{C})$  mesurable. Notons  $\pi_x^1 : Y \rightarrow X \times Y$  qui à  $y$  associe  $(x, y)$ .  $\pi_x^1$  est  $(Y, \mathcal{Y}) - (X \times Y, \mathcal{X} \otimes \mathcal{Y})$  mesurable car chacune des composantes est mesurable. Maintenant, l'identité  $f_x^1 = f \circ \pi_x^1$  donne la mesurabilité voulue, par composition d'applications mesurables.

Revenons à la première proposition. La section verticale de niveau  $x$  :  $A_x = \{y \in Y : (x, y) \in A\}$  peut s'écrire comme une image réciproque puisque  $A_x = (f_x^1)^{-1}(\{1\})$ , avec  $f_x^1(y) = \mathbb{1}_A(x, y)$ . Or l'application de  $X \times Y$  dans  $\mathbb{R}$  qui à  $(x, y)$  associe  $\mathbb{1}_A(x, y)$  est  $(X \times Y, \mathcal{X} \otimes \mathcal{Y}) - (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  mesurable ; comme d'après ce qui précède,  $f_x^1$  est  $(Y, \mathcal{Y}) - (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  mesurable, on a donc  $A_x \in \mathcal{Y}$ .

On traite de la même manière  $A^y$  et  $f_y^2 : x \mapsto f(x, y)$ .  $\square$

**Remarque 4.30.** On dit parfois que  $A^y$  et  $A_x$  sont des sections de l'ensemble  $A$ .

**Théorème 4.31.** Soient  $(X, \mathcal{X}, \mu)$  et  $(Y, \mathcal{Y}, \nu)$  deux espaces mesurés dont les mesures  $\mu$  et  $\nu$  sont  $\sigma$ -finies. Alors, il existe une unique mesure  $m$  sur l'ensemble  $(X \times Y, \mathcal{X} \otimes \mathcal{Y})$  telle que pour tous  $X \in \mathcal{X}$  et  $Y \in \mathcal{Y}$ , on ait

$$m(X \times Y) = \mu(X)\nu(Y).$$

On notera dans la suite  $\mu \otimes \nu$  cette mesure. De plus, pour tout  $E \in \mathcal{X} \otimes \mathcal{Y}$ , les fonctions  $x \mapsto \nu(E_x)$  et  $y \mapsto \mu(E^y)$  sont mesurables et l'on a

$$\int_X \nu(E_x) d\mu(x) = \int_Y \mu(E^y) d\nu(y) = (\mu \otimes \nu)(E).$$

*Démonstration.* Supposons d'abord que  $\mu$  et  $\nu$  sont finies. Soit  $E$  dans  $\mathcal{X} \otimes \mathcal{Y}$ ; d'après le lemme précédent la fonction  $x \mapsto \nu(E_x)$  est bien définie. Notons  $\mathcal{T}'$  la famille des ensembles  $E \in \mathcal{X} \otimes \mathcal{Y}$  tels que cette fonction soit mesurable de  $\mathcal{X}$  dans  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ . Il n'est pas difficile de voir que  $\mathcal{T}'$  est un  $\lambda$ -système (voir la dernière section du chapitre 3). Mais  $\mathcal{T}'$  contient tous les pavés (les éléments de  $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ ). En effet, prenons  $E = A \times B$ , avec  $A \in \mathcal{X}$  et  $B \in \mathcal{Y}$  : on a alors  $E_x = \{y \in B : (x, y) \in A \times B\}$ . Ainsi  $E_x = B$  si  $x \in A$  et  $\emptyset$  sinon, et donc  $\nu(E_x) = \nu(B)$  si  $x \in A$  et 0 sinon. Ainsi,  $\nu(E_x) = \nu(B)\mathbb{1}_A(x)$ , et  $x \mapsto \nu(B)\mathbb{1}_A(x)$  est bien une fonction mesurable de  $\mathcal{X}$  dans  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ .  $\mathcal{T}'$  est donc un  $\lambda$ -système contenant un  $\pi$ -système qui engendre  $\mathcal{X} \otimes \mathcal{Y}$ . Ainsi, d'après le théorème  $\lambda$ - $\pi$ ,  $\mathcal{T}'$  est  $\mathcal{X} \otimes \mathcal{Y}$  tout entier. Finalement, pour tout  $E$  dans  $\mathcal{X} \otimes \mathcal{Y}$ , on peut définir

$$m_1(E) = \int_X \nu(E_x) d\mu(x);$$

et de même on pourrait définir

$$m_2(E) = \int_Y \mu(E^y) d\nu(y).$$

Prenons à nouveau  $E = A \times B$  et  $E_x = \{y \in B : (x, y) \in A \times B\}$ . Ainsi  $E_x = B$  si  $x \in A$  et  $\emptyset$  sinon, et donc  $\nu(E_x) = \nu(B)$  si  $x \in A$  et 0 sinon. Ainsi  $m_1(E) = \int_X \mathbb{1}_A \nu(B) d\mu = \mu(A)\nu(B)$ . En procédant de la même manière, on obtient  $m_2(E) = \int_Y \mathbb{1}_B \mu(A) d\nu = \mu(A)\nu(B)$ . Donc  $m_1$  et  $m_2$  sont des mesures finies qui coïncident sur les pavés : elles sont donc égales.

Passons maintenant au cas où  $\mu$  et  $\nu$  sont  $\sigma$ -finies : on peut partitionner  $X$  (et  $Y$ ) en une famille dénombrable d'ensembles de mesure finie :

$X = \bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i$  et  $Y = \bigcup_{j=1}^{+\infty} B_j$ . Notons  $m^{i,j}$  la mesure associée comme précédemment aux mesures traces  $\nu|_{A_i}$  et  $\mu|_{B_j}$ . En d'autres termes

$$m^{i,j}(E) = \int_X \nu|_{A_i}(E_x) d\mu|_{B_j}(x) = \int_Y \mu|_{B_j}(E^y) d\nu|_{A_i}(x).$$



Alors, il n'est pas difficile de voir que la mesure  $m$  s'écrit  $m = \sum_i \sum_j m^{i,j}$ .

On a alors

$$\begin{aligned} m(A \times B) &= \sum_i \sum_j m^{i,j}((A \times B) \cap (A_i \times B_j)) \\ &= \sum_i \sum_j m^{i,j}((A \cap A_i) \times (B \cap B_j)) \\ &= \sum_i \sum_j \mu(A \cap A_i) \nu(B \cap B_j) \\ &= \left( \sum_i \mu(A \cap A_i) \right) \left( \sum_j \nu(B \cap B_j) \right) = \mu(A) \nu(B). \end{aligned}$$

□

**Remarque 4.32.** *Il n'est pas difficile de voir que si  $\mu, \nu$  sont des mesures  $\sigma$ -finies,  $a$  et  $b$  des réels positifs, alors  $(a\mu) \otimes (b\nu) = (ab)(\mu \otimes \nu)$  (utiliser la partie unicité du théorème).*

**Exercice.** Soient  $(X, \mathcal{X}, \mu)$  un espace mesuré où  $\mu$  est  $\sigma$ -finie,  $f$  une application mesurable de  $(X, \mathcal{X})$  dans  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ . On note  $T$  l'application de  $X \times \mathbb{R}$  dans lui-même qui à  $(x, y)$  associe  $(x, y + f(x))$ . Alors,  $T$  est une application mesurable qui laisse invariante la mesure  $\mu \otimes \lambda$ .

En effet,  $T$  est mesurable car ses composantes sont mesurables. Notons  $m = \mu \otimes \lambda$ . Il suffit de montrer que pour tout  $A \in \mathcal{X}$  et tout borélien  $B$  de  $\mathbb{R}$ , l'ensemble  $E = A \times B$  vérifie  $m(E) = m(T^{-1}(E))$ . On a

$$m(E) = \int_X \lambda(E_x) d\mu(x) \quad \text{et} \quad m(T^{-1}(E)) = \int_X \lambda((T^{-1}(E))_x) d\mu(x).$$

Comme on l'a déjà vu,  $E_x = B$  si  $x \in A$ , tandis que  $E_x = \emptyset$  si  $x \notin A$ . Ainsi, on a  $\lambda(E_x) = \lambda(B) \mathbb{1}_A(x)$ . Par ailleurs,

$$(T^{-1}(E))_x = \{y \in \mathbb{R}; (x, y) \in T^{-1}(E)\} = \{y \in \mathbb{R}; (x, y + f(x)) \in E\},$$

qui est donc égal à  $B - f(x)$  si  $x \in A$ , zéro sinon. Ainsi,

$$\lambda((T^{-1}(E))_x) = \lambda(B - f(x)) \mathbb{1}_A(x).$$

Mais on sait que la mesure de Lebesgue est invariante par translation :

$\lambda(B - f(x)) = \lambda(B)$ . Il n'y a plus qu'à intégrer pour obtenir l'égalité voulue.

### 4.10.2 Théorèmes de Fubini et Tonelli

La partie qui précède aura peut-être semblé un peu fastidieuse au lecteur. Mais maintenant le plus dur est fait, et nous allons voir comment, avec les théorèmes de Fubini et Tonelli, on peut concrètement calculer des intégrales

de fonctions de plusieurs variables. Les résultats suivants se montrent toujours en trois étapes.

On commence par les prouver pour une fonction indicatrice quelconque, puis pour une fonction simple quelconque et on conclut par un argument d'approximation par des fonctions simples (énoncé dans le lemme 4.7).

**Théorème 4.33** (Tonelli). *Soient  $(X, \mathcal{X}, \mu)$  et  $(Y, \mathcal{Y}, \nu)$  deux espaces mesurés dont les mesures  $\mu$  et  $\nu$  sont  $\sigma$ -finies et  $f \in \mathcal{V}_+(X \times Y, \mathcal{X} \otimes \mathcal{Y})$ .  $f$  est donc une fonction positive.*

*Pour tout  $x \in X$ , la fonction  $y \mapsto f(x, y)$  est mesurable de  $(Y, \mathcal{Y})$  dans  $(\overline{\mathbb{R}}_+, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+))$  et la fonction*

$$x \mapsto \int_Y f(x, y) d\nu(y)$$

*est dans  $\overline{\mathcal{V}}_+(X, \mathcal{X})$ .*

*De même pour tout  $y \in Y$ , la fonction  $x \mapsto f(x, y)$  est mesurable de  $(X, \mathcal{X})$  dans  $(\overline{\mathbb{R}}_+, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+))$  et*

$$y \mapsto \int_X f(x, y) d\mu(x)$$

*est dans  $\overline{\mathcal{V}}_+(Y, \mathcal{Y})$ .*

*Enfin, on a les égalités*

$$\begin{aligned} \int_{X \times Y} f d(\mu \otimes \nu) &= \int_X \left( \int_Y f(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x) \\ &= \int_Y \left( \int_X f(x, y) d\mu(x) \right) d\nu(y). \end{aligned}$$

*Démonstration.* La mesurabilité de  $y \mapsto f(x, y)$  est une conséquence immédiate du lemme 4.29.

Supposons que  $f$  s'écrive comme l'indicatrice d'un ensemble  $A \in \mathcal{X} \otimes \mathcal{Y}$  : on a alors

$$\int_Y f(x, y) d\nu(y) = \nu(A_x).$$

La deuxième partie du Théorème 4.31 assure la mesurabilité de l'application  $x \mapsto \int_Y f(x, y) d\nu(y)$  ainsi que

$$\int_X \int_Y f(x, y) d\nu(y) d\mu(x) = \int_X \nu(A_x) d\mu(x) = \mu \otimes \nu(A) = \int_{X \times Y} f d\mu \otimes \nu.$$

Le résultat s'étend aisément à la classe des fonctions simples par linéarité, puis à  $f \in \mathcal{V}_+(X \times Y, \mathcal{X} \otimes \mathcal{Y})$  en utilisant le lemme 4.7 et le théorème de convergence monotone.  $\square$

**Théorème 4.34** (Fubini). Soient  $(X, \mathcal{X}, \mu)$  et  $(Y, \mathcal{Y}, \nu)$  deux espaces mesurés dont les mesures  $\mu$  et  $\nu$  sont  $\sigma$ -finies et  $f \in \mathcal{V}(\mathcal{X} \times \mathcal{Y}, \mathcal{X} \otimes \mathcal{Y})$ . On suppose que

$$\int_{X \times Y} |f| d(\mu \otimes \nu) < +\infty.$$

Alors, il existe  $X' \in \mathcal{X}$  et  $Y' \in \mathcal{Y}$  avec  $\mu(X \setminus X') = \nu(Y \setminus Y') = 0$  et

$$\begin{aligned} \int_{X \times Y} f d(\mu \otimes \nu) &= \int_{X'} \left( \int_Y f(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x) \\ &= \int_{Y'} \left( \int_X f(x, y) d\mu(x) \right) d\nu(y). \end{aligned}$$

*Démonstration.* On va juste montrer la première égalité. D'après le théorème de Tonelli,

$$\int_X \left( \int_Y |f(x, y)| d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int_{X \times Y} |f| d(\mu \otimes \nu) < +\infty.$$

Il s'ensuit que si l'on pose

$$X' = \left\{ x \in X; \int_Y |f(x, y)| d\nu(y) < +\infty \right\},$$

on a  $\mu(X \setminus X') = 0$ .

Par suite  $\mu \otimes \nu(X \times Y \setminus X' \times Y) = \mu(X \setminus X')\nu(Y) = 0$ . (On rappelle que dans  $\mathbb{R}_+$ ,  $0 \cdot \infty = 0$ .)

Ainsi, comme l'hypothèse  $\int_{X \times Y} |f| d(\mu \otimes \nu) < +\infty$  entraîne l'existence de  $\int_{X \times Y} f d(\mu \otimes \nu)$ , on peut écrire

$$\begin{aligned} &\int_{X \times Y} f d(\mu \otimes \nu) \\ &= \int_{X' \times Y} f d(\mu \otimes \nu) \\ &= \int_{X' \times Y} (f^+ - f^-) d(\mu \otimes \nu) \\ &= \int_{X' \times Y} f^+ d(\mu \otimes \nu) - \int_{X' \times Y} f^- d(\mu \otimes \nu) \\ &= \int_{X'} \left( \int_Y f^+(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x) - \int_{X'} \left( \int_Y f^-(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x) \\ &= \int_{X'} \left( \int_Y f^+(x, y) d\nu(y) \right) - \left( \int_Y f^-(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x) \\ &= \int_{X'} \left( \int_Y f(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x). \end{aligned}$$

□

Les théorèmes de Tonelli et Fubini sont intimement liés : très souvent, on utilise d'abord le théorème de Tonelli afin de pouvoir appliquer le théorème

de Fubini. **Exercice.** Pour  $x > 0$ , on pose  $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{(\cos t)(1-\cos t)}{t} e^{-xt} dt$ . Montrer que  $F$  est intégrable sur  $]0, +\infty[$  et que

$$\int_{]0, +\infty[} F(x) d\lambda(x) = \int_{]0, +\infty[} \frac{(\cos t)(1-\cos t)}{t^2} d\lambda(t).$$

Posons  $f(x, t) = \frac{(\cos t)(1-\cos t)}{t} e^{-xt}$ . On a  $|f(x, t)| \leq \frac{1-\cos t}{t} e^{-xt}$ , d'où pour tout  $t > 0$ ,

$$\int_{]0, +\infty[} |f(x, t)| d\lambda(x) \leq \int_{]0, +\infty[} \frac{1-\cos t}{t} e^{-xt} d\lambda(x) = \frac{1-\cos t}{t^2}.$$

La fonction  $t \mapsto \frac{1-\cos t}{t^2}$  est intégrable sur  $]0, +\infty[$  : en effet, elle est continue, admet une limite  $1/2$  en 0 et est en  $O(1/t^2)$  en l'infini. D'après le théorème de Tonelli,  $f$  (ou  $|f|$ ) est intégrable sur  $]0, +\infty[ \times ]0, +\infty[$ . D'après Tonelli, l'application  $x \mapsto \int_{]0, +\infty[} |f(x, t)| d\lambda(t)$  est intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue sur  $]0, +\infty[$ . Comme  $0 \leq F(x) \leq \int_{]0, +\infty[} |f(x, t)| d\lambda(t)$ ,  $F$  l'est aussi. Comme  $f$  est intégrable sur  $]0, +\infty[ \times ]0, +\infty[$ , le théorème de Fubini nous dit que son intégrale est égale à  $\int_{]0, +\infty[} F(x) d\lambda(x)$  d'une part (intégration en  $t$ , puis en  $x$ ), et à

$$\int_{]0, +\infty[} \left( \int_{]0, +\infty[} f(x, t) d\lambda(x) \right) d\lambda(t)$$

d'autre part (intégration en  $x$  puis en  $t$ ), soit  $\int_{]0, +\infty[} \frac{(\cos t)(1-\cos t)}{t^2} d\lambda(t)$ .

### 4.10.3 Associativité de la mesure produit

Soient  $(X, \mathcal{X}, \mu)$ ,  $(Y, \mathcal{Y}, \nu)$ ,  $(Z, \mathcal{Z}, \gamma)$  trois espaces mesurés  $\sigma$ -finis. Comme précédemment, on note  $\mathcal{X} \otimes \mathcal{Y} \otimes \mathcal{Z}$  la tribu engendrée par les ensembles de la forme  $A \times B \times C$ , où  $(A, B, C)$  décrit  $\mathcal{X} \times \mathcal{Y} \times \mathcal{Z}$ .

On note  $\phi$  l'application de  $(X \times Y) \times Z \rightarrow X \times Y \times Z : ((x, y), z) \mapsto (x, y, z)$  et  $\psi$  l'application de  $X \times (Y \times Z) \rightarrow X \times Y \times Z : (x, (y, z)) \mapsto (x, y, z)$ . Alors la mesure image  $m_1$  de  $(\mu \otimes \nu) \otimes \gamma$  par  $\phi$  et la mesure image  $m_2$  de  $\mu \otimes (\nu \otimes \gamma)$  par  $\psi$  sont égales : on note simplement cette mesure  $\mu \otimes \nu \otimes \gamma$ .

Montrons que  $m_1$  et  $m_2$  sont égales. On a :

$$\begin{aligned} m_1(A \times B \times C) &= (\mu \otimes \nu) \otimes \gamma(\phi^{-1}(A \times B \times C)) \\ &= (\mu \otimes \nu) \otimes \gamma((A \times B) \times C) \\ &= \mu \otimes \nu(A \times B) \gamma(C) = \mu(A) \nu(B) \gamma(C) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} m_2(A \times B \times C) &= \mu \otimes (\nu \otimes \gamma)(\psi^{-1}(A \times B \times C)) \\ &= \mu \otimes (\nu \otimes \gamma)(A \times (B \times C)) \\ &= \mu(A) (\nu \otimes \gamma)(B \times C) = \mu(A) \nu(B) \gamma(C), \end{aligned}$$

ce qui montre que les mesures coïncident.

#### 4.10.4 Convolution de mesures

**Définition.** Soient  $\mu$  et  $\nu$  deux mesures  $\sigma$ -finies sur  $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ . On appelle convolée de  $\mu$  et  $\nu$  et on note  $\mu * \nu$  la mesure image de  $\mu \otimes \nu$  par l'application  $(x, y) \mapsto x + y$ .

**Proposition 4.35.** Si  $\mu, \nu$  sont des mesures  $\sigma$ -finies,  $a$  et  $b$  des réels positifs, alors

- $(a\mu) * (b\nu) = (ab)(\mu * \nu)$ .
- $\mu * 0 = 0 * \mu = 0$ , où  $0$  désigne la mesure nulle.

*Démonstration.* Soit  $f : (x, y) \mapsto x + y$ . On a

$$\begin{aligned} (a\mu) * (b\nu)(A) &= ((a\mu) \otimes (b\nu))(f^{-1}(A)) \\ &= ab(\mu \otimes \nu)(f^{-1}(A)) = ab(\mu * \nu)(A). \end{aligned}$$

De plus, on a  $\mu * 0(A) = (\mu \otimes 0)(f^{-1}(A)) = 0$ , et de même  $0 * \mu(A) = (0 \otimes \mu)(f^{-1}(A)) = 0$ . □

## 4.11 Les théorèmes généraux et la mesure de comptage

Un certain nombre de théorèmes généraux donnent des résultats très pratiques lorsqu'ils sont utilisés avec la mesure de comptage. On va juste en énoncer deux, mais le lecteur aura intérêt à relire chaque théorème en se demandant quel résultat on obtient lorsqu'on prend pour une (ou toutes les) mesure(s) en jeu la mesure de comptage. Bien sûr, il retrouvera parfois des résultats connus.

**Théorème 4.36** (Série à paramètre). Soit une famille de nombres réels  $a(k, n)$  pour  $k \geq 1, n \geq 1$  entiers. On suppose qu'il existe une suite de nombres réels positifs  $(c_k)_{k \geq 1}$  avec les propriétés :

$$\forall (n, k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \quad |a(k, n)| \leq c_k, \quad \sum_{k=1}^{+\infty} c_k < +\infty.$$

On suppose que pour tout  $k \geq 1$ , la limite suivante existe :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a(k, n) := a(k, \infty).$$

Alors les deux séries  $s_n = \sum_{k=1}^{+\infty} a(k, n)$  et  $s = \sum_{k=1}^{+\infty} a(k, \infty)$  convergent absolu-

ment et on a de plus  $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = s$ , soit

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} a(k, n) = \sum_{k=1}^{+\infty} a(k, \infty).$$

*Démonstration.* Ici, il s'agit d'appliquer le théorème de convergence dominée à la mesure de comptage.  $\square$

Démontrer le théorème 4.36 par des moyens élémentaires (avec des  $\varepsilon$ ) est également un exercice très instructif que nous vous conseillons vivement.

**Théorème 4.37.** Soient  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  un espace mesuré et  $(f_n)_{n \geq 1}$  une suite de fonctions mesurables positives de  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  dans  $(\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}_+}))$ .

Si on pose  $f = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ , alors

$$\int_{\Omega} f \, d\mu = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{\Omega} f_n \, d\mu.$$

Les deux quantités peuvent valoir  $+\infty$ .

*Démonstration.* On peut, au choix, appliquer le théorème de Tonelli à la fonction  $f(n, x) = f_n(x)$  que l'on intègre sur  $\mathbb{N}^* \times \Omega$ , ou encore appliquer le théorème de convergence monotone aux sommes partielles.  $\square$

**Remarque 4.38.** Série de fonctions

Voici une conséquence de ce théorème. Si la série de terme général  $\int_{\Omega} f_n \, d\mu$  converge, alors  $f$  est intégrable. En particulier  $f(\omega)$  est fini pour  $\mu$ -presque tout  $\omega$ . Nous en déduisons que, pour une suite  $(f_n)$  de fonctions mesurables de signe quelconque, si la série de terme général  $\int_{\Omega} |f_n| \, d\mu$  converge, alors la série de terme général  $f_n(\omega)$  converge (absolument) pour  $\mu$ -presque tout  $\omega$ .

## 4.12 La mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$

**Définition.** On appelle mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}^d$  la mesure  $\lambda^{\otimes d}$ . On la note parfois  $\lambda^d$ , parfois même  $\lambda$  lorsqu'il n'y a pas de confusion possible (mais ce n'est pas une très bonne idée quand on débute). En dimension deux,  $\lambda^{\otimes 2}(A)$  est l'aire de  $A$ ; en dimension trois,  $\lambda^{\otimes 3}(A)$  est le volume de  $A$ .

### 4.12.1 Transformations affines

**Théorème 4.39.** Soit  $y \in \mathbb{R}^d$ . La translation  $x \mapsto x + y$  laisse invariante la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}^d$ .

*Démonstration.* Il suffit de vérifier l'invariance pour un pavé, ce qui est immédiat.  $\square$

L'invariance de la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}^d$  par les translations en fait une mesure très particulière. Plus précisément, on a le résultat suivant :

**Théorème 4.40.** *Soit  $m$  une mesure sur  $\mathbb{R}^d$  invariante par les translations et telle que  $m(B(0,1)) < +\infty$ . Alors  $m = \frac{m(B(0,1))}{\lambda(B(0,1))} \lambda$ .*

*Démonstration.*  $\mathbb{R}^d$  est réunion dénombrable de translatés de la boule unité, donc  $m$  est  $\sigma$ -finie, ce qui permet d'appliquer Tonelli. Si  $m(B(0,1)) = 0$ ,  $m(\mathbb{R}^d) = 0$  et il n'y a rien à démontrer. Sinon, posons  $g = \frac{1}{m(B(0,1))} \mathbb{1}_{B(0,1)}$ . Par construction, on a  $\int_{\mathbb{R}^d} g \, dm = 1$ . On pose  $\alpha = \int_{\mathbb{R}^d} g(-x) \, d\lambda(x) = \frac{\lambda(B(0,1))}{m(B(0,1))}$ . Soit  $f$  une fonction mesurable positive. On a, en appliquant plusieurs fois les invariances de  $\lambda$  et de  $m$  ainsi que le théorème de Tonelli :

$$\begin{aligned} \int f \, d\lambda &= \left( \int f \, d\lambda \right) \left( \int g \, dm \right) \\ &= \int g(y) \left( \int f(x) \, d\lambda(x) \right) \, dm(y) \\ &= \int g(y) \left( \int f(x+y) \, d\lambda(x) \right) \, dm(y) \\ &= \int \left( \int g(y) f(x+y) \, d\lambda(x) \right) \, dm(y) \\ &= \int \left( \int g(y) f(x+y) \, dm(y) \right) \, d\lambda(x) \\ &= \int \left( \int g(y-x) f(y) \, dm(y) \right) \, d\lambda(x) \\ &= \int \left( \int g(y-x) \, d\lambda(x) \right) f(y) \, dm(y) \\ &= \int \alpha f(y) \, dm(y). \end{aligned}$$

Reste à trouver la valeur de  $\alpha$ . En prenant  $f = \mathbb{1}_A$ , on obtient  $\lambda(A) = \alpha m(A)$ , ce qui est le résultat voulu.  $\square$

Revenons aux propriétés d'invariance de la mesure de Lebesgue.

**Théorème 4.41.** *Soit  $M \in SL_d(\mathbb{R})$  (c'est-à-dire que  $\det M = 1$ ). L'application  $x \mapsto Mx$  laisse invariante la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}^d$ .*

*Démonstration.* Par un théorème d'algèbre linéaire, toute matrice de  $SL_d(\mathbb{R})$  peut s'écrire comme produit de matrices de transvections, c'est-à-dire de matrices de la forme  $I_n + \alpha E_{ij}$  avec  $i \neq j$ , où  $E_{ij}$  est la matrice dont tous les coefficients sont nuls, sauf celui en  $(i, j)$  qui vaut 1. Ainsi, il suffit de montrer

le résultat pour une matrice de transvection. Mais c'est alors un cas particulier de l'exercice 2 vu précédemment : on identifie  $\mathbb{R}^d$  à  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{\{2, \dots, d\}}$ , on prend  $\mu = \lambda^{d-1}$  et  $f(x) = \alpha \langle x, e_j \rangle e_i$ .  $\square$

**Théorème 4.42.** Soit  $M \in M_d(\mathbb{R})$ . Pour tout borélien  $A$ , on a

$$\lambda^d(MA) = |\det M| \lambda^d(A).$$

En particulier, pour tout  $c \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda^d(cA) = |c|^d \lambda^d(A)$ .

*Démonstration.* Dans le cas où  $M = \text{diag}(\lambda, 1, \dots, 1)$ , on vérifie facilement la formule lorsque  $A$  est un pavé : on a deux mesures qui coïncident sur un  $\pi$ -système qui engendre la tribu, elles sont donc égales. Passons au cas où  $M$  est inversible. On peut alors écrire  $M = \text{diag}(\det M, 1, \dots, 1)N$ , où  $N \in SL_d(\mathbb{R})$ . Ainsi

$$\begin{aligned} \lambda^d(MA) &= \lambda^d(\text{diag}(\det M, 1, \dots, 1)NA) = |\det M| \lambda^d(NA) \\ &= |\det M| \lambda^d(N^{-1}(NA)) = |\det M| \lambda^d(A). \end{aligned}$$

Reste le cas où  $M$  n'est pas inversible, dans ce cas  $\det M = 0$ , donc il faut montrer que  $\lambda^d(MA) = 0$ . Pour cela, il suffit de montrer que  $\lambda^d(\text{Im } M) = 0$ . Or  $\text{Im } M$  est un espace vectoriel de dimension au plus  $d-1$ , il existe donc une application inversible qui envoie  $\text{Im } M$  dans  $\mathbb{R}^{d-1} \times \{0\}$ . Comme  $\mathbb{R}^{d-1} \times \{0\}$  est de mesure nulle,  $\text{Im } M$  aussi.  $\square$

**Corollaire 4.43.** Si  $M$  est inversible, la mesure image de  $\lambda^d$  par  $x \mapsto Mx + b$  est  $\frac{1}{|\det M|} \lambda^d$ .

### Un calcul de volume : le volume d'un cône

Le calcul d'une aire, ou d'un volume repose souvent sur l'utilisation du théorème de Tonelli ou de son ancêtre, le théorème 4.31. Voyons par exemple comment calculer le volume d'un cône. Une surface plane de  $\mathbb{R}^3$  est un borélien dont la dimension affine est égale à deux. Si  $A$  est une surface plane et  $x$  un point de  $\mathbb{R}^3$  qui n'est pas dans l'espace affine engendré par  $A$ , le cône de sommet  $x$  et de base  $A$  est

$$C = \{(1 - \theta)x + \theta u; (\theta, u) \in [0, 1] \times A\}.$$

Si  $A = A' \times \{h\}$ , avec  $h > 0$  et  $x = (0, 0, 0)$ , en découpant le volume par tranches horizontales (perpendiculaires à « l'axe des  $z$  »), on a

$$\lambda^3(C) = \int_{\mathbb{R}} \lambda^2(C_z) d\lambda(z);$$



où  $C_z = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; (x, y, z) \in C\}$ . On a  $C_z = \frac{z}{h}A'$  pour  $z \in [0, h]$ ,  $C_z = \emptyset$  sinon. On en déduit

$$\begin{aligned}\lambda^3(C) &= \int_{[0, h]} \lambda^2\left(\frac{z}{h}A'\right) d\lambda(z) = \int_{[0, h]} \lambda^2(A') \frac{z^2}{h^2} d\lambda(z) \\ &= \frac{h}{3} \lambda^2(A').\end{aligned}$$

On retrouve donc la formule bien connue : le volume du cône est égal au tiers du produit de la hauteur fois l'aire de la base.

### 4.12.2 Exercice : la fonction Bêta

Rappelons que la fonction *Gamma*  $\Gamma : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$  est définie pour tout  $x > 0$  par  $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ .

1. Montrer que quels que soient  $x, y > 0$ , on a

$$\Gamma(x)\Gamma(y) = \int_{\mathbb{R}^2} (G \circ T)(t_1, t_2) d(\lambda \otimes \lambda)(t_1, t_2),$$

où  $G(t, s) = t^{x-1}(s-t)^{y-1}e^{-t} \mathbb{1}_{\{0 \leq t \leq s\}}$  et  $T(t_1, t_2) = (t_1, t_1 + t_2)$ .

2. Montrer que

$$\Gamma(x)\Gamma(y) = \int_{\mathbb{R}^2} G(t, s) d(\lambda \otimes \lambda)(s, t).$$

3. En déduire que

$$\beta(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)},$$

où la fonction *Beta*  $\beta : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$  est définie pour tous  $x > 0, y > 0$  par  $\beta(x, y) = \int_0^1 \theta^{x-1}(1-\theta)^{y-1} d\theta$ .

### Solution

1. D'après le théorème de Tonelli, on a

$$\Gamma(x)\Gamma(y) = \int_{\mathbb{R}^2} t_1^{x-1} t_2^{y-1} e^{-(t_1+t_2)} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t_1) \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t_2) d(\lambda \otimes \lambda)(t_1, t_2).$$

Il n'est pas difficile de vérifier que

$$t_1^{x-1} t_2^{y-1} e^{-(t_1+t_2)} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t_1) \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t_2) = (G \circ T)(t_1, t_2),$$

ce qui donne le résultat voulu.

2. D'après le théorème de transfert pour les fonctions mesurables positives,

$$\int_{\mathbb{R}^2} G \circ T(t_1, t_2) d(\lambda \otimes \lambda)(t_1, t_2) = \int_{\mathbb{R}^2} G(t, s) d\mu(s, t),$$

où  $\mu$  est la mesure image de  $\lambda \otimes \lambda$  par  $T$ . Or l'application  $T$  est de déterminant 1, donc laisse invariante la mesure  $\lambda \otimes \lambda$ .

On a donc  $\mu = \lambda \otimes \lambda$ , d'où

$$\Gamma(x)\Gamma(y) = \int_{\mathbb{R}^2} G(t, s) d(\lambda \otimes \lambda)(s, t).$$

3. D'après le théorème de Tonelli, on a

$$\int_{\mathbb{R}^2} G(t, s) d(\lambda \otimes \lambda)(s, t) = \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}} G(t, s) d\lambda(t) \right) d\lambda(s).$$

À  $s$  fixé, calculons  $\int_{\mathbb{R}} G(t, s) d\lambda(t)$ . Si  $s < 0$ , l'intégrale est évidemment nulle. Sinon,

$$\int_{\mathbb{R}} G(t, s) d\lambda(t) = e^{-s} \int_0^s t^{x-1} (s-t)^{y-1} dt.$$

En posant  $t = \theta s$ , on a facilement

$$\int_{\mathbb{R}} G(t, s) d\lambda(t) = e^{-s} s^{x+y-1} \int_0^1 \theta^{x-1} (1-\theta)^{y-1} d\theta = e^{-s} s^{x+y-1} \beta(x, y).$$

Finalement, on obtient le résultat voulu

$$\Gamma(x)\Gamma(y) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-s} s^{x+y-1} \beta(x, y) d\lambda(s) = \beta(x, y)\Gamma(x+y).$$

**Corollaire 4.44.** Soient  $M$  une matrice inversible et  $b \in \mathbb{R}^d$ .

On pose  $T(x) = Mx + b$ . Soit  $\mu_1$  une mesure positive sur  $\mathbb{R}^d$  admettant une densité  $f_1$  par rapport à la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}^d$ . Alors, la mesure image de  $\mu_1$  par  $T$  admet comme densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}^d$  la fonction  $f_2$  définie par

$$f_2(y) = \frac{1}{|\det M|} f_1(T^{-1}(y)).$$

*Démonstration.* Soit  $g$  une fonction mesurable positive sur  $\mathbb{R}^d$ . Notons  $\mu_2$  la mesure image de  $\mu_1$  par  $T$ . D'après le théorème de transfert,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} g d\mu_2 &= \int_{\mathbb{R}^d} (g \circ T) d\mu_1 = \int_{\mathbb{R}^d} (g \circ T) f_1 d\lambda^d \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} (g \circ T)(f_1 \circ T^{-1} \circ T) d\lambda^d \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} (g \times f_1 \circ T^{-1}) \circ T d\lambda^d \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} (g \times f_1 \circ T^{-1}) d\lambda_T^d \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} g \times (f_1 \circ T^{-1}) \frac{1}{|\det M|} d\lambda^d \end{aligned}$$

ce qui donne le résultat voulu. □

Les théorèmes qui précèdent correspondent à des transformations affines, ou si l'on préfère, à des changements de variables affines. On va maintenant voir le cas général.

### 4.12.3 Changement de variables $C^1$

**Théorème 4.45.** Soient  $U, U'$  deux ouverts de  $\mathbb{R}^d$ ,  $\phi$  un  $C^1$ -difféomorphisme de  $U$  dans  $U'$ . Soit  $f$  une application mesurable définie sur  $U'$ . Alors  $f$  est intégrable sur  $U'$  si et seulement si  $f \circ \phi(\cdot) \times |\det D_x \phi|$  est intégrable sur  $U$  et

$$\int_{U'} f(y) d\lambda(y) = \int_U f(\phi(x)) \times |\det D_x \phi| d\lambda(x).$$

En particulier, pour  $A$  borélien de  $U$ , on a

$$\int_{\phi(A)} f(y) d\lambda(y) = \int_A f(\phi(x)) \times |\det D_x \phi| d\lambda(x).$$

**Remarque 4.46.** La quantité  $\det D_x \phi$  est appelée déterminant jacobien (ou plus simplement Jacobien) de  $\phi$  au point  $x$ .

Nous avons choisi d'admettre ce théorème. Sa démonstration, difficile, est basée sur le calcul différentiel et nous semble assez éloignée des techniques que ce cours se propose d'enseigner. On pourra trouver une démonstration dans les ouvrages cités en référence.

#### Application : calcul de l'intégrale de Gauss

On prend  $U = ]0, +\infty[ \times ]0, 2\pi[$ ,  $U' = \mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}_+ \times \{0\})$  et  $f(x, y) = \exp(-\frac{x^2+y^2}{2})$ . On fait le changement de variable polaire :  $\phi(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ . D'un côté, on a

$$\int_{U'} f(x, y) d(\lambda \otimes \lambda)(x, y) = \int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) d(\lambda \otimes \lambda)(x, y) = I^2,$$

avec  $I = \int_{\mathbb{R}} \exp(-\frac{x^2}{2}) d\lambda(x)$ , où la dernière égalité vient du théorème de Tonelli. De l'autre, on a

$$|\det D_{r,\theta} \phi| = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r,$$

d'où

$$\int_{]0, +\infty[ \times ]0, 2\pi[} e^{-\frac{r^2}{2}} r d(\lambda \otimes \lambda)(r, \theta) = \int_{]0, +\infty[} (2\pi) r e^{-\frac{r^2}{2}} d\lambda(r) = 2\pi.$$

Pour la dernière égalité, on a remarqué que  $-e^{-r^2/2}$  est une primitive de  $r e^{-\frac{r^2}{2}}$ . On a donc  $I^2 = 2\pi$ , soit

$$I = \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) d\lambda(x) = \sqrt{2\pi}.$$

### Application : mesure image par un $C^1$ -difféomorphisme

**Corollaire 4.47.** Soient  $O_1$  et  $O_2$  deux ouverts de  $\mathbb{R}^d$ ,  $d \geq 1$ . On suppose que  $T$  est un  $C^1$ -difféomorphisme de  $O_1$  dans  $O_2$ . Soit maintenant  $\mu_1$  une mesure positive sur  $\mathbb{R}^d$  telle que  $\mu_1(\mathbb{R}^d \setminus O_1) = 0$  et admettant une densité  $f_1$  par rapport à la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}^d$ . Alors, la mesure image de  $\mu_1$  par  $T$  admet comme densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}^d$  la fonction  $f_2$  définie par

$$f_2(y) = \begin{cases} f_1(T^{-1}(y)) |\det D_y T^{-1}| & \text{si } y \in O_2 \\ 0 & \text{si } y \notin O_2 \end{cases}$$

*Démonstration.* Soit  $g$  une fonction mesurable positive sur  $O_2$ . Notons  $\mu_2$  la mesure image de  $\mu_1$  par  $T$ . D'après le théorème de transfert,

$$\begin{aligned} \int_{O_2} g d\mu_2 &= \int_{O_1} (g \circ T) d\mu_1 = \int_{O_1} (g \circ T) f_1 d\lambda \\ &= \int_{O_1} (g \circ T) f_1 |\det D_{T(x)} T^{-1}| |\det D_x T| d\lambda \\ &= \int_{O_1} (g \times (f_1 \circ T^{-1}) \times |\det D.T^{-1}|) \circ T |\det D_x T| d\lambda \\ &= \int_{O_2} g \times (f_1 \circ T^{-1}) \times |\det D.T^{-1}| d\lambda \end{aligned}$$

ce qui donne le résultat voulu.  $\square$

#### 4.12.4 Intégration des fonctions radiales

**Théorème 4.48.** Soit  $\|\cdot\|$  une norme quelconque sur  $\mathbb{R}^n$ . On note  $V$  le volume de la boule unité pour cette norme. Alors, pour toute fonction  $\phi$  mesurable de  $\mathbb{R}_+$  dans  $\mathbb{R}$ , l'application  $x \mapsto \phi(\|x\|)$  est intégrable par rapport à  $\lambda^{\otimes n}$  si et seulement si  $\int_{\mathbb{R}_+} nt^{n-1} |\phi(t)| d\lambda(t) < +\infty$  et alors

$$\int_{\mathbb{R}^n} \phi(\|x\|) d\lambda^{\otimes n}(x) = V \int_{\mathbb{R}_+} \phi(t) nt^{n-1} d\lambda(t).$$

*Démonstration.* D'après le théorème de transfert,  $\phi \circ \|\cdot\|$  est intégrable si et seulement si  $\phi$  est intégrable par rapport à la mesure image de  $\lambda^{\otimes n}$  par  $\|\cdot\|$ , et on aura alors

$$\int_{\mathbb{R}^n} \phi(\|x\|) d\lambda^{\otimes n}(x) = \int_{\mathbb{R}_+} \phi(t) dm(t).$$

Il suffit donc de caractériser  $m$ . Soit  $a \geq 0$ . En utilisant successivement la définition d'une mesure image, l'homogénéité d'une norme, et la propriété d'échelle de la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}^n$ , on a

$$m([0, a]) = \lambda^{\otimes n}(B(0, a)) = \lambda^{\otimes n}(aB(0, 1)) = a^n \lambda^{\otimes n}(B(0, 1)) = Va^n.$$

Comme les intervalles  $[0, a]$  forment un  $\pi$ -système qui engendre la tribu borélienne de  $\mathbb{R}_+$ , avec  $\mathbb{R}_+ = \bigcup_{i=0}^{+\infty} [0, i]$ , le théorème 3.12 nous dit que la connaissance de  $m$  sur les intervalles  $([0, a])_{a \in \mathbb{R}_+}$  permet de l'identifier. Or il est facile de voir que

$$Va^n = \int_{[0, a]} Vnt^{n-1} d\lambda(t),$$

donc  $m$  est la mesure dont la densité par rapport à la mesure de Lebesgue est  $t \mapsto Vnt^{n-1} \mathbb{1}_{[0, +\infty[}(t)$ . On en déduit que

$$\int_{\mathbb{R}_+} \phi(t) dm(t) = V \int_{\mathbb{R}_+} \phi(t) nt^{n-1} d\lambda(t),$$

ce qui est le résultat voulu. □

**Corollaire 4.49.** Calcul de l'intégrale de Gauss

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) = \sqrt{2\pi}.$$

*Démonstration.* Le théorème de Tonelli donne

$$I^2 = \int_{\mathbb{R}^2} \exp\left(-\frac{x_1^2 + x_2^2}{2}\right) d(\lambda \otimes \lambda)(x_1, x_2) = \int_{\mathbb{R}^2} \phi(\|x\|) d\lambda^2(x),$$

avec  $\phi(x) = \exp(-\frac{x^2}{2})$ . Si on note  $V_2$  le volume de la boule unité euclidienne de  $\mathbb{R}^2$ , avec la formule d'intégration d'une fonction radiale, on a donc

$$I^2 = V_2 \int_0^{+\infty} 2r\phi(r) dr = 2V_2 \lim_{M \rightarrow +\infty} [-\exp(-\frac{r^2}{2})]_0^M = 2\pi,$$

car on sait que  $V_2 = \pi$ . □

On voit sur cet exemple que même en petite dimension, le théorème d'intégration d'une fonction radiale est d'usage plus simple que le changement de variable polaire.

**Corollaire 4.50.** Le volume de la boule unité euclidienne de  $\mathbb{R}^n$  est

$$V_n = \frac{2\pi^{n/2}}{n\Gamma(n/2)}.$$

*Démonstration.* On prend  $\phi(x) = \exp(-\frac{x^2}{2})$ . Le théorème de Tonelli donne

$$\int_{\mathbb{R}^n} \exp(-\frac{\|x\|_2^2}{2}) d\lambda^{\otimes n}(x) = \left( \int_{\mathbb{R}} \exp(-\frac{x^2}{2}) d\lambda(x) \right)^n = (2\pi)^{n/2}.$$

D'autre part le changement de variable  $u = t^2/2$  donne

$$\int_{\mathbb{R}_+} \exp(-\frac{t^2}{2}) n t^{n-1} d\lambda(t) = \int_{\mathbb{R}_+} \exp(-u) n (2u)^{n/2-1} d\lambda(u) = 2^{\frac{n}{2}-1} n \Gamma(\frac{n}{2}).$$

En faisant le quotient et en appliquant le théorème précédent, on obtient le résultat voulu.  $\square$

**Remarque 4.51.** *L'astuce est évidemment de trouver une fonction  $\phi$  pour laquelle on sait calculer les deux intégrales. Ce n'est tout de même pas si fréquent. La méthode permet également de calculer le volume de la boule unité de  $\|\cdot\|_p$ , définie par  $\|x\|_p^p = \sum_{i=1}^n |x_i|^p$ , en prenant  $\phi(x) = \exp(-x^p)$  (exercice laissé au lecteur ; on trouvera comme volume  $\frac{2^n \Gamma(\frac{1}{p}+1)^n}{\Gamma(\frac{n}{p}+1)}$ ).*

## 4.13 Preuve des propriétés de base de l'intégrale

### 4.13.1 Premiers résultats

L'implication  $(f \leq g) \implies \int f d\mu \leq \int g d\mu$  découle évidemment de la définition, de même que le fait que l'intégrale d'une fonction nulle est nulle.

Ce qui est assez étonnant, c'est que la linéarité ne puisse être obtenue simplement ; nous l'obtiendrons en réalité comme corollaire du lemme de Beppo Levi.

Pour  $(\Omega_i)_{i \in I}$  partition finie, notons

$$I((\Omega_i)_{i \in I}, f) = \sum_i \inf\{f(\omega); \omega \in \Omega_i\} \mu(\Omega_i).$$

Il est important de remarquer que si  $(\Omega_i)_{i \in I}$  est une partition finie et  $(\Omega'_j)_{j \in J}$  une autre partition finie, alors

$$I((\Omega_i \cap \Omega'_j)_{(i,j) \in I \times J}, f) \geq I((\Omega_i)_{i \in I}, f)$$

et

$$I((\Omega_i \cap \Omega'_j)_{(i,j) \in I \times J}, f) \geq I((\Omega'_j)_{j \in J}, f).$$

**Lemme 4.52.** *Si une fonction est  $\mu$ -presque partout nulle, alors son intégrale par rapport à  $\mu$  est nulle.*

*Démonstration.* Il suffit de considérer le cas d'une fonction positive, car si  $f$  est presque partout nulle,  $f^+$  et  $f^-$  le sont aussi. Si une fonction  $f$  positive

est  $\mu$ -presque partout nulle, alors pour tout  $i$  tel que  $\inf\{f(\omega); \omega \in \Omega_i\} > 0$ , on a  $\mu(\Omega_i) \leq \mu(f \geq \inf\{f(\omega); \omega \in \Omega_i\}) \leq \mu(f > 0) = 0$ . Cela entraîne que pour toute partition finie,  $I((\Omega_i)_{i \in I}, f) = 0$ , d'où la nullité de l'intégrale.  $\square$

**Lemme 4.53.** Soient  $f$  mesurable positive,  $\alpha > 0$  et  $A$  mesurable. Alors

$$\int (f + \alpha \mathbb{1}_A) d\mu = \int f d\mu + \alpha \mu(A).$$

*Démonstration.* Soit  $(\Omega_i)_{i \in \Omega_i}$  une partition quelconque. Posons  $J = \{1, 2\}$  avec  $\Omega'_1 = A$ ,  $\Omega'_2 = A^c$ .

Comme  $\inf\{f(\omega) + \alpha \mathbb{1}_A(\omega); \omega \in \Omega_i \cap \Omega'_j\} = \inf\{f(\omega); \omega \in \Omega_i \cap \Omega'_j\} + \alpha \mathbb{1}_{j=1}$ , on a en multipliant par  $\mu(\Omega_i \cap \Omega'_j)$  et en faisant la somme sur les couples  $(i, j)$  :

$$I((\Omega_i \cap \Omega'_j)_{(i,j) \in I \times J}, f + \alpha \mathbb{1}_A) = I((\Omega_i \cap \Omega'_j)_{(i,j) \in I \times J}, f) + \alpha \mu(A).$$

Ainsi

$$\begin{aligned} I((\Omega_i)_{i \in I}, f + \alpha \mathbb{1}_A) &\leq I((\Omega_i \cap \Omega'_j)_{(i,j) \in I \times J}, f + \alpha \mathbb{1}_A) \\ &= I((\Omega_i \cap \Omega'_j)_{(i,j) \in I \times J}, f) + \alpha \mu(A) \\ &\leq \int f d\mu + \alpha \mu(A), \end{aligned}$$

d'où en passant au supremum :

$$\int (f + \alpha \mathbb{1}_A) d\mu \leq \int f d\mu + \alpha \mu(A).$$

Réciproquement, soit  $M < \int f d\mu$ . Il existe une partition finie  $(\Omega_i)_{i \in I}$ , avec  $I((\Omega_i)_{i \in I}, f) > M$ . On a alors

$$\begin{aligned} \int (f + \alpha \mathbb{1}_A) d\mu &\geq I((\Omega_i \cap \Omega'_j)_{(i,j) \in I \times J}, f + \alpha \mathbb{1}_A) \\ &= I((\Omega_i \cap \Omega'_j)_{(i,j) \in I \times J}, f) + \alpha \mu(A) \\ &> M + \mu(A). \end{aligned}$$

En passant au supremum en  $M$ , on obtient l'égalité voulue.  $\square$

En particulier, si  $f$  s'écrit comme la somme finie  $f = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}$ , avec pour tout  $i$ ,  $\alpha_i \geq 0$  et  $A_i$  mesurable, on a  $\int f d\mu = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(A_i)$ . Ainsi, on obtient la linéarité pour les fonctions simples positives.

Remarquons également que pour  $f$  positive, comme  $f \geq \alpha \mathbb{1}_{\{f \geq \alpha\}}$ , on a  $\int f d\mu \geq \alpha \mu(f \geq \alpha)$ <sup>4</sup>. Ainsi, si  $f$  positive est d'intégrale nulle, on a pour tout  $n : 0 = \int f d\mu \geq \frac{1}{n} \mu(f \geq \frac{1}{n})$ , soit  $\mu(f \geq 1/n) = 0$ , et donc d'après le théorème de continuité séquentielle décroissante,  $\mu(f > 0) = 0$ .

4. On reverra cette inégalité plus tard dans le cas où  $\mu$  est une mesure de probabilité. Elle aura alors le nom d'inégalité de Markov.

### 4.13.2 Démonstration du théorème de Beppo Levi

1. On va d'abord montrer une forme très faible de ce résultat : si  $f$  est une fonction simple positive et  $(E_n)_{n \geq 1}$  une suite croissante d'ensembles mesurables de réunion  $E$ , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int \mathbb{1}_{E_n} f \, d\mu = \int \mathbb{1}_E f \, d\mu$ . En effet, si  $f = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}$ , avec pour tout  $i$ ,  $\alpha_i \geq 0$ , on a  $f \mathbb{1}_{E_n} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbb{1}_{A_i \cap E_n}$  et

$$\int \mathbb{1}_{E_n} f \, d\mu = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(A_i \cap E_n).$$

La convergence vers  $\sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(A_i \cap E) = \int \mathbb{1}_E f \, d\mu$  découle alors du théorème de continuité séquentielle croissante.

2. Passons au cas général. On considère  $(f_n)$  une suite croissante de fonctions mesurables positives tendant vers  $f$  et on veut montrer que  $\int f_n \, d\mu$  tend vers  $\int f \, d\mu$ . Bien sûr, la suite  $(\int f_n \, d\mu)_n$  est croissante, majorée par  $\int f \, d\mu$ , donc la limite existe et est majorée par  $\int f \, d\mu$ . Il suffit donc de montrer que  $\lim \int f_n \, d\mu \geq \int f \, d\mu$ . Par définition de l'intégrale, il suffit de montrer que pour toute partition finie  $(\Omega_i)_{i \in I}$ , on a  $\lim \int f_n \, d\mu \geq I((\Omega_i)_{i \in I}, f)$ . Posons  $g = \sum_{i \in I} \inf\{f(\omega), \omega \in \Omega_i\} \mathbb{1}_{\Omega_i}$ .  $g$  est une fonction simple, avec  $0 \leq g \leq f$ .

Fixons  $\alpha \in ]0, 1[$  et posons  $E_n = \{f_n \geq \alpha g\}$ . Comme la suite  $(f_n)$  est croissante, la suite  $(E_n)$  est croissante. Comme les fonctions  $f_n$  et  $g$  sont mesurables,  $E_n \in \mathcal{F}$ . Si  $g(\omega) = 0$ , on a  $\omega \in E_n$  pour tout  $n$ , sinon, comme  $\lim f_n(\omega) = g(\omega) > \alpha g(\omega)$ , on a  $\omega \in E_n$  pour  $n$  assez grand. Finalement, la réunion des  $E_n$  est  $\Omega$  tout entier. Ainsi, d'après la forme faible du théorème<sup>5</sup>, c'est-à-dire la partie 1. de cette démonstration,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int \mathbb{1}_{E_n} \alpha g \, d\mu = \int \alpha g \, d\mu.$$

On a

$$f_n \geq \mathbb{1}_{E_n} f_n \geq \mathbb{1}_{E_n} \alpha g,$$

d'où

$$\lim \int f_n \, d\mu \geq \lim \int \mathbb{1}_{E_n} \alpha g \, d\mu = \int \alpha g \, d\mu,$$

soit

$$\lim \int f_n \, d\mu \geq \alpha I((\Omega_i)_{i \in I}, f).$$

---

5. Noter que si les  $f_n$  n'étaient pas mesurables,  $E_n$  ne serait pas nécessairement dans  $\mathcal{F}$  et on ne pourrait invoquer la forme faible. L'hypothèse de mesurabilité sert donc bien à quelque chose !



En faisant tendre  $\alpha$  vers 1, on obtient l'inégalité souhaitée

$$\lim \int f_n d\mu \geq I((\Omega_i)_{i \in I}, f).$$

### 4.13.3 Preuve de la linéarité

Soient  $f, g$  deux fonctions mesurables positives,  $\alpha > 0$ . On veut montrer que  $\int (f + \alpha g) d\mu = \int f d\mu + \alpha \int g d\mu$ . Soient  $(f_n), (g_n)$  des suites croissantes de fonctions simples positives convergeant respectivement vers  $f$  et  $g$ . On a pour tout  $n$

$$\int (f_n + \alpha g_n) d\mu = \int f_n d\mu + \alpha \int g_n d\mu.$$

En appliquant trois fois le théorème de Beppo Levi, on obtient à la limite  $\int (f + \alpha g) d\mu = \int f d\mu + \alpha \int g d\mu$ .

Passons au cas où  $f$  et  $g$  sont intégrables, de signe quelconque. On a  $\int |\alpha g| d\mu \leq \int |\alpha| g^+ + |\alpha| g^- d\mu < +\infty$  en utilisant la linéarité pour les fonctions positives. Ainsi, on obtient pour  $\alpha > 0$

$$\int \alpha g d\mu = \int (\alpha g)^+ d\mu - \int (\alpha g)^- d\mu = \alpha \int g^+ d\mu - \alpha \int g^- d\mu = \alpha \int g d\mu$$

et pour  $\alpha < 0$

$$\int \alpha g d\mu = \int (\alpha g)^+ d\mu - \int (\alpha g)^- d\mu = (-\alpha) \int g^- d\mu + \alpha \int g^+ d\mu = \alpha \int g d\mu.$$

On est ainsi ramené à étudier le cas  $\alpha = 1$ . Comme  $|f + g| \leq |f| + |g|$ ,  $f + g$  est intégrable. Posons  $f + g = h$ . On a  $f^+ - f^- + g^+ - g^- = h^+ - h^-$ , soit  $f^+ + g^+ + h^- = f^- + g^- + h^+$ . D'où en intégrant

$$\int f^+ + \int g^+ + \int h^- = \int f^- + \int g^- + \int h^+.$$

En changeant de membre, on obtient le résultat voulu.

Maintenant qu'on a la linéarité, montrons que si  $f \leq g$   $\mu$ -presque partout, alors  $\int f d\mu \leq \int g d\mu$ . Écrivons  $f = f \mathbb{1}_{\{f \leq g\}} + f \mathbb{1}_{\{f > g\}}$  et  $g = g \mathbb{1}_{\{f \leq g\}} + g \mathbb{1}_{\{f > g\}}$ . Comme  $f \mathbb{1}_{\{f > g\}}$  et  $g \mathbb{1}_{\{f > g\}}$  sont nulles et donc d'intégrale nulle, donc par linéarité  $f = f \mathbb{1}_{\{f \leq g\}}$  a même intégrale que  $f$ , et  $g = g \mathbb{1}_{\{f \leq g\}}$  a même intégrale que  $g$ . Comme  $f \mathbb{1}_{\{f \leq g\}} \leq g \mathbb{1}_{\{f \leq g\}}$ , on a en intégrant le résultat voulu.

Ceci achève la preuve des propriétés de base de l'intégrale.

## 4.14 Exercices sur les intégrales

### 4.14.1 Exercices corrigés

**Exercice 53.** Montrer l'existence de  $\int_{]0,1]} \left\{ \frac{1}{x} \right\} d\lambda(x)$ , puis montrer que

$$\int_{]0,1]} \left\{ \frac{1}{x} \right\} d\lambda(x) = 1 - \gamma,$$

où  $\gamma$  est la constante d'Euler, qu'on a introduite à la section 4.7.3.<sup>6</sup>

**Exercice 54.** *Continuité de la transformée de Laplace.*

Soit  $f$  une fonction continue de  $\mathbb{R}_+$  dans  $\mathbb{C}$ . On suppose que l'intégrale impropre  $\int_0^{+\infty} f(t) dt$  existe (c'est-à-dire que  $\int_0^T f(t) dt$  admet une limite quand  $T$  tend vers  $+\infty$ ). Montrer que pour tout  $\lambda \geq 0$ , l'intégrale impropre  $\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} f(t) dt$  existe et que la fonction  $\lambda \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} f(t) dt$  est continue sur  $\mathbb{R}_+$ .

**Exercice 55.** *Théorème du retour de Poincaré.*

Soient  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  un espace mesuré et  $T$  une transformation, c'est-à-dire une application mesurable de  $(\Omega, \mathcal{F})$  dans lui-même. On suppose que  $\mu$  est une mesure finie et qu'elle est invariante sous l'action de  $T$ , c'est-à-dire que la mesure image de  $\mu$  par l'application  $T$  est  $\mu$  elle-même. Alors, le théorème du retour dit que pour tout ensemble mesurable  $A$  de mesure non nulle, la suite des itérées  $(T^n(x))_{n \geq 0}$  passe une infinité de fois dans  $A$  pour presque tout  $x$  appartenant à  $A$ .

1. On pose  $N(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{1}_A(T^k(x))$  ainsi que  $Y(x) = \exp(-N(x))$ , avec la convention  $\exp(-(+\infty)) = 0$ . Montrer que  $Y$  est une application mesurable intégrable par rapport à  $\mu$ .
2. On pose  $Z(x) = Y(Tx)$ . Montrer que  $Y(x) = e^{-\mathbb{1}_A(x)} Z(x)$ , puis que  $\int Y(x) d\mu(x) = \int Z(x) d\mu(x)$ .
3. Conclure.

**Exercice 56.**

Étudier la limite, lorsque  $n$  tend vers l'infini de

1.  $\int_0^{+\infty} \frac{\log(x+n)}{n} e^{-x} \cos x dx.$
2.  $\int_0^1 \frac{1+nx}{(1+x)^n} dx.$
3.  $\int_1^{+\infty} \frac{1+nx}{(1+x)^n} dx.$

---

<sup>6</sup> On pourra trouver d'autres intégrales du même style avec des applications à la théorie des nombres dans l'ouvrage de Pólya et Szegő [32], Partie II, chapitre 1, paragraphe 5.

**Exercice 57.** Les fonctions  $f(x, y)$  suivantes sont-elles intégrables sur le pavé  $[0, 1] \times [0, 1]$  ?

1.  $(x - y)(x^2 + y^2)^{-3/2}$ .
2.  $(1 - xy)^p$  avec  $p < 0$ .
3.  $(x^2 - y^2)/(x^2 + y^2)^2$ .
4.  $(x - y)/(x + y)^3$ .

**Exercice 58.** *Intégrales de Wallis.*

1. On pose

$$W_n = \int_0^{\pi/2} (\cos \theta)^n d\theta.$$

Montrer que  $W_n = \frac{n-1}{n} W_{n-2}$ . En déduire que la suite  $(nW_n W_{n-1})_{n \geq 1}$  est constante.

2. Montrer que  $W_n W_{n+1} \leq W_n^2 \leq W_n W_{n-1}$ . En déduire l'équivalent à l'infini

$$W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

Pour d'autres méthodes de calcul de cet équivalent, on peut se reporter à l'exercice 73 ainsi qu'aux indications de l'exercice 91.

**Exercice 59.** *Calcul de l'intégrale de Gauss.*

1. On pose  $J_n = \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt$ . Montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$ .
2. Exprimer  $J_n$  en fonction d'une intégrale de Wallis. En déduire la valeur de l'intégrale de Gauss :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2/2} dt = \frac{1}{2} \sqrt{2\pi} = \sqrt{\pi/2}.$$

**Exercice 60.** *Calcul de  $\Gamma(1/2)$ .*

Connaissant la valeur de l'intégrale de Gauss, montrer que

$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}.$$

**Exercice 61.** 1. À l'aide d'un développement en série entière, montrer que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1} = \int_0^1 \frac{dx}{x^3+1}.$$

2. On donne

$$\frac{1}{x^3+1} = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{1+x} - \frac{x-2}{x^2-x+1} \right).$$

Montrer que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1} = \frac{3 \log 2 + \sqrt{3}\pi}{9}.$$

**Exercice 62.** Calcul de l'intégrale de Dirichlet avec Fubini.

Soit  $a > 0$ . Montrer que la fonction,  $f : (x, y) \mapsto e^{-xy} \sin x$ , est intégrable sur  $[0, a] \times [0, +\infty[$ . On pose  $I_a = \int_{[0, a] \times [0, +\infty[} f(x, y) d\lambda \otimes \lambda(x, y)$ . Déterminer la

limite de  $I_a$  quand  $a$  tend vers  $+\infty$ . En déduire la valeur de  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ .

**Exercice 63.** Calcul d'intégrales liées aux intégrales de Fresnel.

Le but de cet exercice est le calcul des intégrales de la forme

$$\int_0^{+\infty} e^{iu} u^{\alpha-1} du, \quad 0 < \alpha < 1$$

et d'intégrales liées.

1. On pose, pour  $\lambda \geq 0$ ,

$$\phi(\lambda) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda u} e^{iu} u^{\alpha-1} du.$$

Montrer que  $\phi$  définit une fonction continue sur  $[0, +\infty[$ .

2. Montrer que  $\phi$  est dérivable sur  $]0, +\infty[$  et satisfait l'équation différentielle  $\phi'(\lambda) = \frac{\alpha}{i-\lambda} \phi(\lambda)$ . En déduire que pour tout  $\lambda > 0$ , on a

$$\phi(\lambda) = \phi(0) \frac{1}{(\lambda^2 + 1)^{\alpha/2}} \exp(-\alpha i \arctan \lambda).$$

3. Montrer que pour tout  $\lambda > 0$ , on a

$$\phi(0) = (1 + \lambda^{-2})^{\alpha/2} \exp(\alpha i \arctan \lambda) \int_0^{+\infty} e^{-x} e^{i\frac{x}{\lambda}} x^{\alpha-1} dx.$$

4. En déduire que

$$\int_0^{+\infty} e^{iu} u^{\alpha-1} du = \exp\left(i\alpha \frac{\pi}{2}\right) \Gamma(\alpha),$$

et en particulier, comme  $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ ,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos u}{\sqrt{u}} du = \int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{\sqrt{u}} du = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

5. Calculer les intégrales de Fresnel

$$\int_0^{+\infty} \cos(u^2) du \text{ et } \int_0^{+\infty} \sin(u^2) du.$$

**Exercice 64.** Intégrale de Dirichlet : semi-convergence et un équivalent.

Montrer que l'intégrale  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$  est convergente, mais que la fonction  $\frac{\sin t}{t}$

n'est pas intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}_+$ . Montrer de plus l'équivalent à l'infini  $\int_0^{n\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt \sim \frac{2}{\pi} \log n$ .

**Exercice 65.** Calcul de l'intégrale de Dirichlet à l'aide d'une intégrale à paramètre.

1. On pose, pour  $x \geq 0$ ,  $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} e^{-xt} dt$ . Montrer que  $F$  est correctement définie et définit une fonction continue sur  $\mathbb{R}_+$ .
2. Montrer que  $F$  est dérivable sur  $]0, +\infty[$ , avec  $F'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$ .
3. Calculer  $F$  et en déduire la valeur de  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ .

**Exercice 66.** Calculer l'intégrale  $I = \int_{V(a,b,c)} (x^2 + y^2 + z^2) d\lambda^{\otimes 3}(x, y, z)$ , où

$$V(a, b, c) = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \right\}.$$

On rappelle que le volume de la boule unité de  $\mathbb{R}^3$  est  $\frac{4}{3}\pi$ .

Indication : commencer par traiter le cas où  $a = b = c = 1$ .

**Exercice 67.** Théorème de Minkowski. Application : le théorème des 4 carrés.

Soit  $d$  un entier, avec  $d \geq 2$ . Pour  $u_1, \dots, u_d$  vecteurs de  $\mathbb{R}^d$ , on rappelle que  $\det(u_1, \dots, u_d)$  est le déterminant de la matrice dont les colonnes sont les coordonnées de  $u_1, \dots, u_d$  dans la base canonique.

Une partie  $A$  de  $\mathbb{R}^d$  est dite *convexe* si quels que soient  $a, b \in A$  et  $\theta \in [0, 1]$ , on a  $\theta a + (1 - \theta)b \in A$ . Une partie  $A$  de  $\mathbb{R}^d$  est dite *symétrique* par rapport à l'origine si pour tout  $a \in A$ ,  $-a \in A$ .

Si  $(u_1, \dots, u_d)$  sont des vecteurs de  $\mathbb{R}^d$  formant une partie libre, l'ensemble

$$S = \left\{ \sum_{k=1}^d z_k u_k; z \in \mathbb{Z}^d \right\}$$

est appelé un réseau.

Le but de l'exercice est de montrer le théorème suivant, dû à Minkowski. Soit  $A$  un convexe de  $\mathbb{R}^d$  symétrique par rapport à l'origine. Si le réseau  $S$  basé sur  $u_1, \dots, u_d$  est tel que  $\lambda^d(A) > 2^d |\det(u_1, \dots, u_d)| > 0$ , alors  $A$  rencontre le réseau  $S$  en un point différent de  $(0, \dots, 0)$ .

1. On pose  $T = [0, 1[^d$ . Montrer que les ensembles  $\left( (\frac{1}{2}A) \cap (s + T) \right)_{s \in \mathbb{Z}^d}$  forment une partition de  $\frac{1}{2}A$ .
2. Montrer que si  $\lambda^d 2(A) > 2^d$ , alors les ensembles  $(\frac{1}{2}A + s)_{s \in \mathbb{Z}^d}$  ne sont pas deux-à-deux disjoints.  
En déduire qu'alors  $A$  intersecte  $\mathbb{Z}^d \setminus \{(0, \dots, 0)\}$ .
3. Montrer le théorème voulu dans le cas général.

4. (a) Soit  $p$  un nombre premier. Calculer le nombre de carrés dans  $\mathbb{F}_p$ . En déduire qu'il existe des entiers  $r$  et  $s$  tels que  $r^2 + s^2 + 1$  soit divisible par  $p$ .
- (b) Soit  $A$  l'image de  $\mathbb{Z}^d$  par l'application de matrice

$$\begin{pmatrix} p & 0 & r & s \\ 0 & p & s & -r \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Montrer que le carré de la norme euclidienne d'un point de  $A$  est divisible par  $p$ . Montrer que  $A$  rencontre la boule euclidienne ouverte de rayon  $\sqrt{2p}$  ailleurs qu'en zéro. (On rappelle que le volume de la boule unité de  $\mathbb{R}^4$  est  $\frac{\pi^2}{2}$ .)

- (c) On rappelle l'identité de Lagrange :  
 si  $X = bc' - b'c$ ,  $Y = ca' - c'a$ ,  $Z = ab' - a'b$ ,  $T = aa' + bb' + cc'$ ,  
 alors  
 $X^2 + Y^2 + Z^2 + T^2 = (a^2 + b^2 + c^2) \cdot (a'^2 + b'^2 + c'^2)$ . Montrer que tout entier s'écrit comme somme de 4 carrés d'entiers.

**Exercice 68.** *Fonction Gamma : formule de récurrence et application au calcul de la transformée de Fourier de la gaussienne.*

1. Montrer que la fonction  $\Gamma$  vérifie, pour tout réel  $x > 0$ , l'égalité  $\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x)$ . En particulier, vérifier que pour tout entier  $n \geq 0$ , on a :

$$\Gamma(n+1) = n! \quad \text{et} \quad \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{(2n)!}{2^{2n} \cdot n!}.$$

2. On donne  $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ . Montrer que pour tout entier naturel  $n$ , on a

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} t^{2n} e^{-t^2/2} d\lambda(t) = \frac{(2n)!}{2^n n!}.$$

3. On pose  $G(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}$ . Montrer que pour tout  $x$  réel

$$\int_{\mathbb{R}} G(t) e^{itx} d\lambda(t) = \int_{\mathbb{R}} G(t) \cos(tx) d\lambda(t) = \sqrt{2\pi} G(x).$$

4. En deuxième lecture du livre : interpréter les résultats démontrés en termes probabilistes.

**Exercice 69.** *Fonction Gamma et fonction Zêta.*

Pour  $s > 1$ , on pose  $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$ . Montrer que l'on a

$$\zeta(s)\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} t^{s-1} \frac{e^{-t}}{1 - e^{-t}} dt.$$

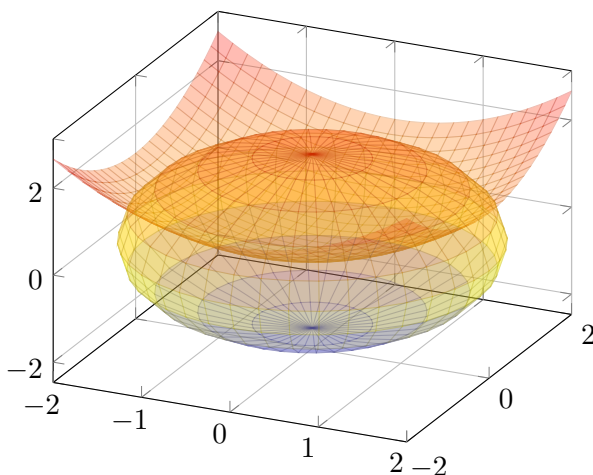
**Exercice 70.** *Formule de Stirling.*

1. Montrer que  $\int_{2n}^{+\infty} x^n e^{-x} dx = o(\Gamma(n+1))$ .
2. Montrer l'équivalent  $\frac{\Gamma(n+1)}{e^{-n} n^{n+1/2}} \sim \int_{-\sqrt{n}}^{\sqrt{n}} (1 + \frac{u}{\sqrt{n}})^n e^{-u\sqrt{n}} du$ .
3. Montrer que pour tout  $x \in ]-1, 1[$ , on a  $\ln(1+x) - x \leq -\frac{x^2}{6}$ .
4. On rappelle que  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2} dt = \sqrt{2\pi}$ . Montrer que on a l'équivalent suivant en  $+\infty$  :

$$\Gamma(n+1) \sim \sqrt{2\pi} e^{-n} n^{n+1/2}.$$

**Exercice 71.** On note  $S$  la boule de  $\mathbb{R}^3$  centrée en l'origine et de rayon 2 et  $H^-$  la surface inférieure de frontière paraboloidique (elliptique) :

$$H^- = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 3z \leq x^2 + y^2\}.$$



Pour toute partie  $A$  de  $\mathbb{R}^3$ , on note  $A_z$  sa tranche de niveau  $z$  :

$$A_z = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; (x, y, z) \in A\}.$$

1. Soit  $z \in \mathbb{R}$ . Montrer que

$$(S \cap H^-)_z = \begin{cases} S_z & \text{si } z < 0 \\ \emptyset & \text{si } z > 1 \\ \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 3z \leq x^2 + y^2 \leq 4 - z^2\} & \text{si } z \in [0, 1] \end{cases}$$

2. Montrer que  $\lambda^{\otimes 3}(S \cap H^-) = \frac{15}{2}\pi$ .
3. Le centre de gravité d'un solide homogène représenté par le borélien borné  $A$  est le point

$$\frac{1}{\lambda(A)} \int_A (x, y, z) d\lambda^{\otimes 3}(x, y, z).$$

Montrer que le centre de gravité de  $S \cap H^-$  est le point de coordonnées  $(0, 0, -\frac{13}{30})$ .

4. On pose

$$H^+ = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 3z > x^2 + y^2\}.$$

Montrer que le centre de gravité de  $S \cap H^+$  est le point de coordonnées  $(0, 0, \frac{39}{38})$ . Indication : on conseille ne pas refaire tous les calculs, de remarquer plutôt que le centre de gravité de  $S$  est l'origine.

**Exercice 72.** *Solide de révolution - centre de gravité.*

Pour  $\theta$  réel, on note  $M_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix}$ .  $M_\theta$  est la matrice de la rotation d'angle  $\theta$  autour de l'axe des  $y$ .

1. On prend  $0 \leq \alpha < \beta \leq 2\pi$ . Montrer que  $T : (x, y, \theta) \mapsto M_\theta \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$  réalise un  $C^1$ -difféomorphisme de  $]0, +\infty[ \times \mathbb{R} \times ]\alpha, \beta[$  sur son image.
2. Soit  $V$  un borélien de  $]0, +\infty[ \times \mathbb{R}$ . On note  $R = T(V \times ]\alpha, \beta[)$ .  $R$  est un volume de révolution engendré par la rotation de la surface  $V \times \{0\}$  autour de l'axe des  $y$  entre les angles  $\alpha$  et  $\beta$ . Montrer que

$$\lambda^3(R) = (\beta - \alpha) \int_V x \, d\lambda^2(x, y).$$

3. Si  $V$  est un ensemble mesurable borné de  $\mathbb{R}^n$  de mesure non-nulle, on appelle alors centre de gravité de  $V$  le point  $G = (m_1, \dots, m_n)$  défini par  $m_i = \frac{1}{\lambda^d(V)} \int_V x_i \, d\lambda^d(x_1, \dots, x_d)$ . Démontrer le théorème de Pappus-Guldin : la mesure du volume engendré par la révolution d'un élément de surface plane autour d'un axe situé dans son plan et ne le coupant pas est égale au produit de l'aire de la surface par la longueur de la circonférence décrite par son centre de gravité. En déduire la position du centre de gravité d'un quart de disque.
4. Montrer que si  $\lambda^2(V) > 0$ , alors les coordonnées du centre de gravité de  $W = T(V \times [0, 2\pi])$  sont

$$\left( 0, \frac{\int_V xy \, d\lambda^2(x, y)}{\int_V x \, d\lambda^2(x, y)}, 0 \right).$$

**Exercice 73.** *Méthode de Laplace.*

Soient  $g$  et  $h$  des fonctions mesurables de  $\mathbb{R}_+$  dans  $\mathbb{R}$ . On suppose que :

- $h$  est strictement décroissante,
- on a en  $0$  :  $h(x) = h(0) - cx^\beta + o(x^\beta)$  avec  $c > 0$  et  $\beta > 0$ ,
- on a en  $0$  :  $g(x) \sim Ax^\alpha$  avec  $\alpha > -1$  et  $A \neq 0$ ,



$$- \int_{\mathbb{R}_+} |g(x)|e^{h(x)} dx < +\infty.$$

Le but de l'exercice est de montrer que lorsque  $t$  tend vers l'infini, on a

$$I(t) = \int_0^{+\infty} g(x)e^{th(x)} d\lambda(x) \sim Ae^{h(0)t}(ct)^{-\frac{\alpha+1}{\beta}} K_{\alpha,\beta},$$

avec  $K_{\alpha,\beta} = \frac{1}{\beta} \Gamma(\frac{\alpha+1}{\beta})$ . On vérifie sans peine que le résultat est encore vrai si les intégrales et les fonctions ne sont pas définies sur  $[0, +\infty[$ , mais sur  $[0, M[$  avec  $0 < M < +\infty$ .

1. Soit  $\delta > 0$ . On pose

$$I_\delta(t) = \int_{[0,\delta]} g(x)e^{th(x)} d\lambda(x) \text{ et } R_\delta(t) = \int_{[\delta,+\infty[} g(x)e^{th(x)} d\lambda(x).$$

Montrer que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{R_\delta(t)}{e^{h(0)t} t^{-\frac{\alpha+1}{\beta}}} = 0.$$

2. Exprimer  $\int_{[0,+\infty[} u^\alpha e^{-u^\beta} d\lambda(u)$  à l'aide de la fonction  $\Gamma$ .

3. Pour  $\delta > 0$ , on pose  $q_\delta(x) = \frac{g(x)}{Ax^\alpha} \mathbb{1}_{[0,\delta]}(x)$  et  $r(x) = \frac{h(0)-h(x)}{cx^\beta}$ . Vérifier qu'il existe  $\delta > 0$  tel que  $|q_\delta(x)| \leq 2$  et  $r(x) \geq 1/2$  pour  $x \in ]0, \delta]$ .

Montrer que

$$\frac{I_\delta(t)}{Ae^{h(0)t}(ct)^{-\frac{\alpha+1}{\beta}}} = \int_{\mathbb{R}_+} q_\delta \left( \frac{u}{(ct)^{1/\beta}} \right) u^\alpha e^{-r\left(\frac{u}{(ct)^{1/\beta}}\right)u^\beta} d\lambda(u).$$

4. Conclure.

**Exercice 74.** Soient  $\mu$  et  $\nu$  deux mesures  $\sigma$ -finies sur  $\mathbb{R}^n$ . On suppose que  $\nu$  admet une densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}^n$ . Montrer que  $\mu * \nu$  admet une densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}^n$ .

**Exercice 75.** Convergence uniforme de séries trigonométriques.

1. Pour un entier naturel non nul  $n$  et un réel  $t$ , on pose

$$F_n(t) = \sum_{k=1}^n \frac{\sin(kt)}{k}.$$

Montrer l'existence d'une constante  $M$  telle que

$$\forall n \geq 1 \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad |F_n(t)| \leq M.$$

2. Soit  $(\varepsilon_n)_{n \geq 1}$  une suite réelle décroissante de limite nulle. Montrer que la série de terme général  $\varepsilon_k \frac{\sin(kt)}{k}$  converge uniformément.

3. Donner un exemple de série trigonométrique convergeant uniformément, mais pas normalement.

Pour d'autres jolis résultats sur les séries trigonométriques, on pourra se reporter à Kahane [26].

### 4.14.2 Exercices non corrigés

**Exercice 76.** Soit  $\mathcal{C}_b$  l'ensemble des fonctions continues bornées sur  $\mathbb{R}$ . Soient  $\mu$  et  $\nu$  deux mesures finies sur  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ . Montrer que si pour toute  $f \in \mathcal{C}_b$ ,  $\int_{\mathbb{R}} f d\mu = \int_{\mathbb{R}} f d\nu$ , alors  $\mu = \nu$ .

**Exercice 77.** Soient  $\mu$  une mesure finie sur  $(\Omega, \mathcal{F})$  et  $f$  une application finie  $\mu$ -presque partout. Montrer que les quatre conditions suivantes sont équivalentes :

1.  $f$  est intégrable par rapport à  $\mu$ .
2.  $\int_{\{|f|>n\}} |f| d\mu$  tend vers 0 quand  $n$  tend vers l'infini
3.  $\sum_{n \geq 1} n\mu(n < |f| \leq n+1) < +\infty$ .
4.  $\sum_{n \geq 0} \mu(|f| > n) < +\infty$ .

Indication : montrer  $a \iff b, a \iff c, d \implies c, (c \& b) \implies d$ .

**Exercice 78.** Soient  $\mu$  une mesure sur  $(\Omega, \mathcal{F})$  et  $f$  intégrable par rapport à  $\mu$ . Montrer que la fonction

$$g = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} f^2 \mathbb{1}_{\{n > |f|\}}$$

est intégrable par rapport à  $\mu$ .

**Exercice 79.** *Intégration par rapport à une somme de mesures.*

Soit  $(\mu_i)_{i \in \mathbb{N}}$  une suite de mesures définies sur un espace  $(\Omega, \mathcal{F})$ .

1. Montrer que  $\mu = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu_i$  est une mesure sur  $(\Omega, \mathcal{F})$ .
2. Montrer que pour  $f$  mesurable positive, puis pour  $f$  intégrable, on a

$$\int_{\Omega} f d\mu = \sum_{i \in \mathbb{N}} \int_{\Omega} f d\mu_i.$$

**Exercice 80.** Soit  $(f_n)_{n \geq 0}$  une suite croissante d'applications  $\mu$ -intégrables convergeant  $\mu$  presque partout vers  $f$ . On suppose qu'il existe une constante  $K$  telle que

$$\forall n \geq 0 \quad \int f_n d\mu \leq K.$$

Montrer que  $f$  est  $\mu$ -intégrable et que  $\int |f_n - f| d\mu$  tend vers 0 lorsque  $n$  tend vers l'infini.

**Exercice 81.** Soit  $(f_n)_{n \geq 0}$  une suite décroissante d'applications  $\mu$ -mesurables positives. On suppose que  $f_1$  est  $\mu$ -intégrable. Montrer que  $(f_n)$  converge simplement vers une fonction mesurable  $f$ , que  $f$  est  $\mu$ -intégrable et que  $\int |f_n - f| d\mu$  tend vers 0 lorsque  $n$  tend vers l'infini.

**Exercice 82.** Soit  $f$  une fonction réelle intégrable sur  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ . Montrer que si  $\int_A f d\mu = 0$  pour tout  $A \in \mathcal{F}$ , alors  $f = 0$  presque partout.

**Exercice 83.** 1. Calculer  $I_n = \int_0^1 x^n \log x dx$  pour  $n \in \mathbb{N}$ .

2. En déduire la valeur de  $\int_0^1 \frac{\log x}{1-x} dx$ , sachant que  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ .

3. En calculant de deux manières différentes  $\int_0^1 (1-x)^n \ln(x) dx$ , montrer que pour  $n \geq 0$ , on a

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{(k+1)^2} = \frac{H_{n+1}}{n+1}, \text{ où } H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

**Exercice 84.** Démontrer que

$$\int_0^1 (e^x - 1) \left( \log x + \frac{1}{x} \right) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2 + n + 1}{n(n+1)(n+1)!}.$$

**Exercice 85.** Calculer  $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$ . En déduire  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ .

**Exercice 86.** Démontrer que  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{e^x - 1} dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{n^2 + a^2}$ .

**Exercice 87.** Démontrer que  $\int_0^1 \frac{(x \log x)^2}{1+x^2} dx = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+3)^3}$ .

**Exercice 88.** Calcul de  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$  avec Fubini.

Calculer de deux façons différentes :

$$J = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{1}{1+2xy+y^2} dx dy.$$

**Exercice 89.** Montrer que pour tout  $z \in \mathbb{C}$ ,  $(1+z/n)^n$  tend vers  $\exp(z)$  lorsque  $n$  tend vers l'infini.

**Exercice 90.** Régularité de la fonction Gamma.

Démontrer que la fonction  $\Gamma$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $]0, +\infty[$  et que pour tout entier  $n \geq 1$ ,

$$\Gamma^{(n)}(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} (\log t)^n t^{x-1} dt.$$

**Exercice 91.** *Intégrale de Wallis de deuxième espèce.*

Trouver par convergence dominée l'équivalent de l'intégrale de Wallis de seconde espèce :

$$\int_0^\pi \left(\frac{\sin x}{x}\right)^n dx \sim \sqrt{\frac{3\pi}{2n}}.$$

**Exercice 92.** *Gamma et Zêta, la suite.*

Soit  $s > 0$ . Montrer que

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{s-1}}{1+e^t} dt = \Gamma(s)\eta(s), \text{ avec } \eta(s) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^s}$$

$\eta$  est la fonction éta de Dirichlet.

Lorsque  $s > 1$ , montrer que  $\eta(s) = (1 - \frac{1}{2^{s-1}})\zeta(s)$ .

**Exercice 93.** Montrer que pour  $\alpha > 2$ , on a

$$\int_1^{+\infty} \frac{\{x\}}{x^\alpha} dx = \frac{1}{\alpha-2} - \frac{\zeta(\alpha-1)}{\alpha-1}.$$

À l'aide du résultat de l'exercice 53, en déduire le développement asymptotique en 0 à droite :  $\zeta(1+h) = \frac{1}{h} + \gamma + o(1)$ , où  $\gamma$  est la constante d'Euler.

**Exercice 94.** 1. Soit  $\phi$  une application de  $\mathbb{N}$  dans  $\mathbb{R}_+$ . Montrer que l'on a

$$\int_{\mathbb{R}^d} \phi(\text{Ent}(\|x\|_\infty)) d\lambda^d(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} ((2n+2)^d - (2n)^d) \phi(n).$$

2. Soit  $\alpha > 0$ . À quelle condition la fonction  $x \mapsto \frac{1}{\|x\|_2^\alpha}$  est elle intégrable sur le complémentaire de la boule unité ?
3. Montrer que l'application  $f : x \mapsto \frac{x}{\|x\|_2^2}$  réalise un  $C^1$  difféomorphisme de  $\{x \in \mathbb{R}^d; 0 < \|x\|_2 < 1\}$  sur  $\{x \in \mathbb{R}^d; 1 < \|x\|_2\}$  et que sa différentielle est

$$h \mapsto Df_x \cdot h = \frac{\|x\|_2^2 h - 2\langle x, h \rangle x}{\|x\|_2^4}.$$

4. Soit  $\alpha > 0$ . À quelle condition la fonction  $x \mapsto \frac{1}{\|x\|_2^\alpha}$  est elle intégrable sur la boule unité ?

**Exercice 95.** Pour  $x \geq 0$ , on pose  $R(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du$ . Le but de l'exercice est de démontrer l'identité

$$\int_0^{+\infty} \frac{R(x)}{\sqrt{x}} dx = \sqrt{2\pi}.$$

1. Montrer que  $R(x)$  est bien définie pour  $x \geq 0$  et qu'on a en l'infini  $R(x) = O(1/x)$ . En déduire que  $R$  est bornée.
2.  $\frac{R(x)}{\sqrt{x}}$  est-elle intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}_+$  ?
3. Pour  $\lambda \geq 0$ , On pose  $R_\lambda(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u} e^{-\lambda u} du$ .

(a) Justifier l'existence de  $R_\lambda(x)$ , puis montrer que pour tout  $x > 0$  et tout  $\lambda > 0$ , on a

$$|R_\lambda(x) - R(x)| \leq |\cos x| \frac{1 - e^{-\lambda x}}{x} + \int_x^{+\infty} \frac{\Psi(\lambda u)}{u^2} du,$$

où on a posé  $\Psi(x) = |e^{-x}(1+x) - 1|$ .

- (b) Montrer qu'il existe  $M < +\infty$  telle que  $\Psi(x) \leq M$  pour tout  $x \geq 0$ . En déduire que pour tout  $x > 0$ ,  $\lim_{\lambda \rightarrow 0} R_\lambda(x) = R(x)$ .
- (c) Montrer qu'il existe  $L > 0$  telle que  $\Psi(x) \leq Lx^2$  pour tout  $x \geq 0$ . Établir les inégalités

$$\forall \lambda > 0 \quad \forall x \geq 1 \quad |R_\lambda(x) - R(x)| \leq \frac{1 + 2M}{x}$$

$$\forall \lambda > 0 \quad \forall x \leq 1 \quad |R_\lambda(x) - R(x)| \leq \lambda + L\lambda^2 + 2M.$$

Indication :

$$\int_x^{+\infty} \frac{\Psi(\lambda u)}{u^2} du = \int_x^1 \frac{\Psi(\lambda u)}{u^2} du + \int_1^{+\infty} \frac{\Psi(\lambda u)}{u^2} du.$$

- (d) Montrer que pour tout  $\lambda > 0$ ,  $\frac{R_\lambda(x)}{\sqrt{x}}$  est intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}_+$ , puis que

$$\int_0^{+\infty} \frac{R(x)}{\sqrt{x}} dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \int_0^{+\infty} \frac{R_\lambda(x)}{\sqrt{x}} dx.$$

4. Montrer que pour tout  $\lambda > 0$ , on a

$$\int_0^{+\infty} \frac{R_\lambda(x)}{\sqrt{x}} dx = 2 \int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{\sqrt{u}} e^{-\lambda u} du.$$

5. Montrer finalement que

$$\int_0^{+\infty} \frac{R(x)}{\sqrt{x}} dx = \sqrt{2\pi}.$$

(On rappelle que  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{\sqrt{u}} du = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ .)

**Exercice 96.** Expression intégrale de  $\Gamma'(x)/\Gamma(x)$ .

Le but de cet exercice est de donner une expression intégrale de la fonction spéciale digamma (appelée aussi fonction psi), qui est la dérivée logarithmique de la fonction Gamma.

On note  $\psi$  la fonction définie sur  $]0, +\infty[$  par la relation

$$\psi(x) = \int_0^{+\infty} \left( \frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-xt}}{1 - e^{-t}} \right) dt.$$

Pour  $n$  entier naturel non nul, on pose

$$H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

1. Vérifier que  $\psi$  est bien définie.
2. Montrer que pour tout entier  $n \geq 1$ ,

$$H_n = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-(n+1)t}}{1 - e^{-t}} dt.$$

3. Pour  $u > 0$ , on pose

$$F(u) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-ut}}{t} dt.$$

Vérifier que  $F$  est bien définie sur  $]0, +\infty[$ , puis montrer qu'elle est dérivable. En déduire la valeur de  $F$ .

4. On pose

$$J_n = \int_0^{+\infty} e^{-nt} \left( \frac{1}{t} - \frac{1}{1 - e^{-t}} \right) dt.$$

Déterminer la limite de  $J_n$  quand  $n$  tend vers l'infini.

5. En déduire que  $\psi(1) = -\gamma$ , où  $\gamma$  est la constante d'Euler.
6. On pose  $\beta(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$  (c'est la fonction Bêta). Montrer que

$$\forall t > 0, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\varepsilon} - \beta(\varepsilon, t - \varepsilon) \right) = -\Gamma'(1) + \frac{\Gamma'(t)}{\Gamma(t)}.$$

7. On rappelle la représentation intégrale de la fonction Bêta :

$$\beta(a, b) = \int_0^1 \theta^{a-1} (1 - \theta)^{b-1} d\theta.$$

Montrer que

$$\frac{\Gamma'(t)}{\Gamma(t)} - \frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)} = \int_0^1 \frac{1 - \theta^{t-1}}{1 - \theta} d\theta.$$

8. Montrer que  $\frac{\Gamma'(t)}{\Gamma(t)} = \psi(t)$ .