Notons $\omega_f(\delta) = \sup\{|f(x) - f(y)|; |x - y| \leq \delta\}$ le module de continuité de f. Soit $\delta \in]0,1[$. On a pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
|f * k_n(x) - f(x)| &\leq \int_{\mathbb{R}} |f(x-t) - f(x)| k_n(t)\, d\lambda(t) \\
&\leq \int_{\mathbb{R}} \left(\omega_f(\delta) + 2\|f\|_\infty \mathbb{1}_{\{|t|>\delta\}}\right) k_n(t)\, d\lambda(t) \\
&\leq \omega_f(\delta) + 4\|f\|_\infty \int_\delta^1 \frac{(1-t^2)^n}{a_n}\, dt \\
&\leq \omega_f(\delta) + 4\|f\|_\infty \frac{(1-\delta^2)^n}{a_n} \\
&\leq \omega_f(\delta) + 8(n+1)\|f\|_\infty (1-\delta^2)^n.
\end{aligned}$$

En passant au supremum en x, on a $\|f * k_n - f\|_\infty \leq \omega_f(\delta) + 8(n+1)\|f\|_\infty(1-\delta^2)^n$, puis en passant à la limite supérieure en n :

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}} \|f * k_n - f\|_\infty \leq \omega_f(\delta).$$

Comme f est uniformément continue, $\lim_{\delta\to 0} \omega_f(\delta) = 0$, ce qui donne le résultat voulu.

3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on obtient

$$\begin{aligned}
(f * k_n)(x) &= \int_{\mathbb{R}} f(t) k_n(x-t)\, d\lambda(t) = \frac{1}{a_n}\int_{\mathbb{R}} f(t) g_n(x-t)\, d\lambda(t) \\
&= \frac{1}{a_n}\int_{[-1/2,1/2]} f(t) g_n(x-t)\, d\lambda(t).
\end{aligned}$$

Lorsque $|x| \leq 1/2$, on a $|x-t| \leq 1$ pour tout $t \in [-1/2, 1/2]$, donc

$$(f * k_n)(x) = \frac{1}{a_n}\int_{[-1/2,1/2]} f(t)(1-(x-t)^2)^n\, d\lambda(t).$$

Or $(1-(x-t)^2)^n$ se développe en

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} (x-t)^{2k} = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \sum_{i=0}^{2k} \binom{2k}{i} (-t)^{2k-i} x^i,$$

d'où en posant $c_k = \int_{[-1/2,1/2]} t^k f(t)\, d\lambda(t)$:

$$(f * k_n)(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \sum_{i=0}^{2k} \binom{2k}{i} (-1)^{2k-i} \frac{c_{2k-1}}{a_n} x^i,$$

qui est bien un polynôme en x de degré $2n$.

4. Soit f une fonction continue sur $[-1/4, 1/4]$. On peut la prolonger de

manière classique en une fonction $\tilde{f}$ continue, nulle à l'extérieur de $[-1/2, 1/2]$, affine sur $[-1/2, -1/4]$ et $[1/4, 1/2]$. $\tilde{f}$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$, avec $\omega_{\tilde{f}}(\delta) \leq \max(\omega_f(\delta), 2\delta|f(1/4)|, 2\delta|f(-1/4)|)$. D'après ce qui précède, $(\tilde{f} * k_n)(x)$ est une suite de polynômes qui converge uniformément vers f sur $[-1/4, 1/4]$. Passons au cas général : soit f une fonction continue sur $[a, b]$, et notons $g(\theta) = (b-a)2\theta + \frac{a+b}{2}$. $f \circ g$ est une fonction continue sur $[-1/4, 1/4]$, donc il existe une suite (P_n) de polynômes qui converge uniformément vers $f \circ g$ sur $[-1/4, 1/4]$. Posons alors $Q_n = P_n \circ g^{-1}$. Q_n est un polynôme avec

$$\begin{aligned}\sup_{x \in [a,b]} |Q_n(x) - f(x)| &= \sup_{x \in [a,b]} |P_n(g^{-1}(x)) - (f \circ g)(g^{-1}(x))| \\ &= \sup_{y \in [-1/4, 1/4]} |P_n(y) - (f \circ g)(y)|,\end{aligned}$$

qui tend bien vers 0 lorsque n tend vers l'infini.

Solution 195

1. Posons $f(x) = \mathbb{1}_E * \mathbb{1}_{-E}$. On a $\forall x, y \in \mathbb{R}$
$$f(x) - f(y) = \int_{\mathbb{R}} (\mathbb{1}_{-E}(x-t) - \mathbb{1}_{-E}(y-t)) \mathbb{1}_E(t)\, d\lambda(t),$$
donc quels que soient x et y réels, on a
$$|f(x) - f(y)| \leq \int_{\mathbb{R}} |\mathbb{1}_E(t-x) - \mathbb{1}_E(t-y)|\, d\lambda(t) = \|T_x \mathbb{1}_E - T_y \mathbb{1}_E\|_1.$$
Or pour $g \in L^1$ l'application $x \mapsto T_x g$ est continue de $\mathbb{R}$ dans L^1, ce qui donne la continuité de f.
2. $f(0) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_E(t)\mathbb{1}_{-E}(0-t)\, d\lambda(t) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_E(t)^2\, d\lambda(t) = \lambda(E) > 0$. Par continuité de f, il existe α tel que $f(x) > 0$ pour $x \in [-\alpha, \alpha]$. Mais si $f(x) > 0$, la mesure de Lebesgue des t tels que
$$\mathbb{1}_E(x-t)\mathbb{1}_{-E}(t) = \mathbb{1}_E(x-t)\mathbb{1}_E(-t) > 0$$
est strictement positive. En particulier, il existe t tel que $x - t \in E$ et $-t \in E$, donc $x = x - t - (-t) \in E - E$.

D.9 Exercices sur les fonctions caractéristiques

Solution 203

1. Pour tout $s \geq 0$, on a
$$\mathcal{L}_{\Gamma(r,\lambda)}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-tx}\gamma_{r,\lambda}(x)\, dx = \frac{\lambda^r}{(\lambda+t)^r} \int_0^{+\infty} \gamma_{r+t,\lambda}(x)\, dx = \frac{\lambda^r}{(\lambda+t)^r}.$$
2. Comme X et Y sont indépendantes, on a l'égalité
$$\mathcal{L}_{X+Y}(t) = \mathcal{L}_X(t)\mathcal{L}_Y(t) = \frac{\lambda^{r+s}}{(\lambda+t)^{r+s}} = \mathcal{L}_{\Gamma(r+s,\lambda)}(t),$$