possibles, en supposant qu'il n'y ait pas d'ex-æquos ?
Réponse : $3500 \times 3499 \times \cdots \times 3202 \times 3201$. Ici D est l'ensemble des rangs, on a donc $D = \{1, \dots, 300\}$ et A l'ensemble des candidats (donc $|A| = 3500$). On compte bien le nombre d'applications injectives puisqu'une même personne ne peut avoir deux rangs différents.

A.4.4 Nombre de parties de Ω possédant p éléments

Proposition A.8. *On pose $|\Omega| = n$. Par définition, on note $\binom{n}{p}$ le nombre de parties à p éléments d'un ensemble de n éléments. Il s'agit donc de calculer $|\mathcal{B}_p(\Omega)|$. On va montrer que*

$$\binom{n}{p} = \frac{n(n-1)\dots(n-p+1)}{p(p-1)\dots1} = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer le lemme des bergers à
- D : ensemble des injections de $\{1, \dots, p\}$ dans Ω,
- $A = \mathcal{B}_p(\Omega)$,
- ϕ définie par $\phi(f) = \text{Image}(f) = \{f(k); k \in \{1, \dots, p\}\}$.

On a vu précédemment que $|A| = n(n-1)\dots(n-p+1)$. Il n'est pas difficile de voir que ϕ est surjective. Une partie $\{e_1, \dots, e_p\}$ de Ω étant donnée, combien existe-t-il d'injections (en fait de bijections) de $\{1, \dots, p\}$ dans Ω telles que $\{f(1), \dots, f(p)\} = \{e_1, \dots, e_p\}$? C'est évidemment le nombre d'injections de $\{1, \dots, p\}$ dans $\{e_1, \dots, e_p\}$, c'est-à-dire $p!$. Le lemme des bergers s'applique donc avec $a = p!$, d'où le résultat. $\square$

Exemple : 3500 personnes se présentent au concours de l'Agrégation de Mathématiques. 300 places sont mises au concours. Combien y a-t-il de listes alphabétiques des reçus possibles ? Réponse : $\binom{3500}{300}$. Ici, Ω est l'ensemble des candidats et $p = 300$ le nombre de reçus.

A.4.5 Nombre total de parties de Ω

Proposition A.9. *Le nombre total de parties de Ω est $|\mathcal{P}(\Omega)| = 2^{|\Omega|}$.*

Démonstration. Il suffit de remarquer que l'application

$$\mathcal{P}(\Omega) \to \{0; 1\}^{\Omega}, \quad A \mapsto \mathbb{1}_A$$

est une bijection. On rappelle que pour $A \subset \Omega$, l'application $\mathbb{1}_A$ (appelée indicatrice de A) est définie sur Ω par

$$\mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in A, \\ 0 \text{ si } x \notin A. \end{cases}$$

$\square$