$\mu_n$, est un estimateur de la moyenne

$$\bar{X}_n = \int_{\mathbb{R}} x \, d\mu_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i,$$

3. la variance empirique, qui est la variance de la distribution empirique $\mu_n$, est un estimateur de la variance

$$S_n^2 = \int_{\mathbb{R}} (x - \bar{X}_n)^2 \, d\mu_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2.$$

**Théorème 13.2.** *Soit $X_1, \dots, X_n, \dots$ un échantillon infini d'une loi de carré intégrable. On a alors*

1. *la fonction de répartition empirique $F_n(x)$ converge (lorsque $n \to +\infty$) presque sûrement vers $F(x)$,*
2. *la moyenne empirique $\bar{X}_n$ converge presque sûrement vers $\mathbb{E}X_1$,*
3. *la variance empirique $S_n^2$ converge presque sûrement vers Var$(X_1)$.*

*Démonstration.* 1. $F_n(x)$ est la somme de variables aléatoires indépendantes suivant la même loi de Bernoulli dont le paramètre est l'espérance $\mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{X_1 \le x\}}) = \mathbb{P}(X_1 \le x) = F(x)$. De plus, sa variance vaut

$$\mathrm{Var}(\mathbb{1}_{\{X_1 \le x\}}) = \mathbb{E}\mathbb{1}^2_{\{X_1 \le x\}} - \mathbb{P}(X_1 \le x)^2 = F(x) - F(x)^2.$$

Ainsi, on voit que $\mathbb{1}_{\{X_1 \le x\}}$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $F(x)$. D'après la loi forte des grands nombres, $F_n(x)$ converge presque sûrement vers la moyenne de $\mathbb{1}_{\{X_1 \le x\}}$, qui n'est autre que $F(x)$.

2. Le résultat découle directement de la loi forte des grands nombres.

3. Remarquons que $S_n^2 = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right) - \bar{X}_n^2$. Le premier terme converge presque sûrement vers $\mathrm{Var}(X_1) + (\mathbb{E}X_1)^2$ tandis que le second tend presque sûrement vers $(\mathbb{E}X_1)^2$. On en déduit que $S_n^2$ converge presque sûrement vers $\mathrm{Var}(X_1) + (\mathbb{E}X_1)^2 - (\mathbb{E}X_1)^2 = \mathrm{Var}(X_1)$.

$\square$

**Définition.** *L'estimateur $T_n$, construit à partir d'un $n-$échantillon, de $f(\theta)$ est consistant (ou convergeant) si $T_n$ converge en probabilité vers $f(\theta)$ pour tout $\theta \in \Theta$. Il est dit fortement consistant si $T_n$ converge $\mathbb{P}_\theta$-presque sûrement vers $f(\theta)$ pour tout $\theta \in \Theta$.*

Par le théorème 13.2, on voit que les estimateurs $F_n(x), \bar{X}_n$ et $S_n^2$ sont fortement consistants.